



Métodos Matemáticos de Especialidad

Ingeniería Eléctrica

Sistemas de ecuaciones no lineales 1

José Luis de la Fuente O'Connor

jl.delafuente@iberdrola.es

jldelafuente@etsii.upm.es

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid





Índice

- **Introducción**
- **Sistemas de una ecuación y una variable**
 - Método de la bisección
 - Método de Newton
 - Variantes del método de Newton
 - Método de Müller
- **Sistemas de ecuaciones no lineales**
 - Método de Newton-Raphson
 - Variantes del método de Newton
 - Métodos cuasi Newton
- **Mínimos cuadrados no lineales**





Introducción

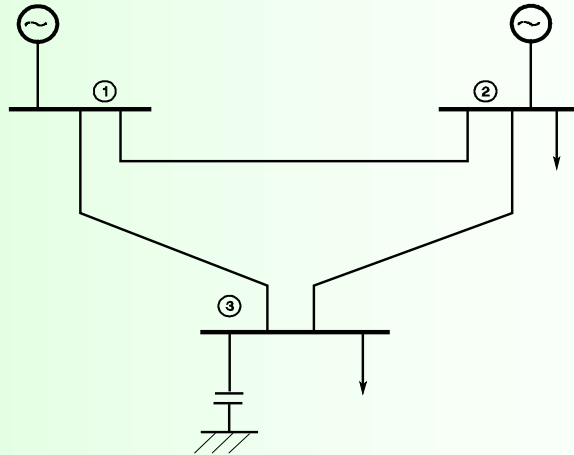
- Vamos a estudiar los métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales: dar respuesta al problema:

dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, hallar un x^* tal que $f(x^*) = 0$.

- La función vectorial f se supone **continua y diferenciable** en algún conjunto abierto de \mathbb{R}^n , con derivadas parciales continuas en ese abierto.
- Los métodos que analizamos se basan en **procedimientos iterativos** en los que **en cada paso se resuelve un sistema de ecuaciones lineales**, resultante de una simplificación lineal del problema original en el entorno del punto que define el comienzo de una nueva etapa.



Estudios de cargas en sistemas eléctricos de generación y transporte de energía



- A partir de un patrón de demanda y generación de potencia en cada uno de los nodos que configuran ese sistema:

Los estudios de circulación de cargas determinan las **tensiones** en módulo y argumento en los nodos de la red, los **flujos de potencia activa y reactiva** por todos los elementos del sistema, **intensidad por las líneas**, **pérdidas en éstas**, etc.



- Si se supone que los **parámetros físicos de un sistema eléctrico permanecen constantes**, existen cuatro variables asociadas a cada nudo i de ese sistema: la tensión, en módulo, V_i , y argumento, θ_i ; la potencia activa inyectada, P_i , y la potencia reactiva inyectada, Q_i .
- Las potencias inyectadas en i dependen de su tensión y de las de los a él unidos.
 - Las expresiones que las relacionan, si no hay transformadores, son

$$P_i = |V_i|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (G_{p_{ij}} + G_{s_{ij}}) - |V_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |V_j| [G_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{s_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j)]$$
$$Q_i = -|V_i|^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (B_{p_{ij}} + B_{s_{ij}}) - |V_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |V_j| [G_{s_{ij}} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{s_{ij}} \cos(\theta_i - \theta_j)]$$

- donde: V_i es el módulo de la tensión en el nudo i ;
 θ_i el argumento de la tensión en el nudo i ;
 $G_{s_{ij}}$ la conductancia serie (constante) de la línea que une el nudo i con el nudo j ;
 $G_{p_{ij}}$ la conductancia a tierra (constante) de la línea que une el nudo i con el j ;
 $B_{s_{ij}}$ la susceptancia serie (constante) de la línea que une el nudo i con el nudo j ; y
 $B_{p_{ij}}$ la susceptancia a tierra (constante) de la línea que une el nudo i con el j .





- Como las tensiones es norma que se midan **respecto a una** determinada **referencia**, ésta se elige en un nudo cualquiera que sea factible, asignándole la tensión de referencia 1 para el módulo y 0 para el argumento: **nudo holgura**.
- Los tipos de nudos de un sistema y qué variables e incógnitas definirían cada uno de ellos se recogen en la siguiente tabla.

Tipo de nudo	Variables dadas	Incógnitas
Carga o PQ	P, Q	V, θ
Generación o PV	P, V	Q, θ
Holgura	V, θ	P, Q

- Si, por ejemplo, de un nudo se conocen el módulo de la tensión y la potencia activa inyectada, para caracterizarlo totalmente habrá que calcular la potencia reactiva inyectada en él y el argumento de su tensión.





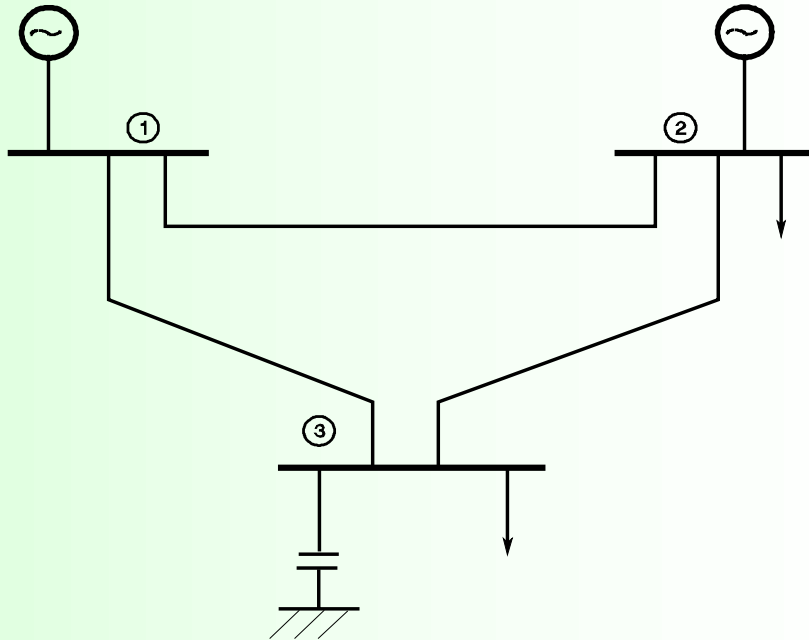
- Al suponer $V_1 = 1$ y $\theta_1 = 0$, para caracterizar un sistema eléctrico de n nudos se necesitarán conocer $2n - 2$ variables.
- Para caracterizar totalmente un sistema general habrá que resolver un sistema de $2n - 2$ ecuaciones no lineales de la forma

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}) &= b_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}) &= b_2 \\ &\vdots \\ f_{2n-2}(x_1, x_2, \dots, x_{2n-2}) &= b_{2n-2}. \end{aligned} \tag{1}$$





– Consideremos como **ejemplo** el pequeño sistema eléctrico de antes.





- Si se elige como nudo de holgura el 1, el 2 es PV y el 3 PQ. La función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ que definiría el sistema no lineal de ecuaciones con el que determinar el estado de funcionamiento de ese sistema es la siguiente:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} V_2 \\ V_2^2 \sum_{j=1,3} (G_{p_{2j}} + G_{s_{2j}}) - V_2 \sum_{j=1,3} V_j (G_{2j} \cos(\theta_2 - \theta_j) + B_{2j} \sin(\theta_2 - \theta_j)) \\ V_3^2 \sum_{j=1,2} (G_{p_{3j}} + G_{s_{3j}}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j (G_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j) + B_{3j} \sin(\theta_3 - \theta_j)) \\ -V_3^2 \sum_{j=1,2} (B_C + B_{p_{3j}} + B_{s_{3j}}) - V_3 \sum_{j=1,2} V_j (G_{3j} \sin(\theta_3 - \theta_j) - B_{3j} \cos(\theta_3 - \theta_j)) \end{bmatrix}.$$

La susceptancia del condensador conectado al nudo 3 es B_C .

- El término independiente del sistema de ecuaciones, el \mathbf{b} de (1), lo constituirán los valores de V_2 , P_2 , P_3 y Q_3 , datos del problema.





Índice

- **Introducción**
- **Sistemas de una ecuación y una variable**
 - **Método de la bisección**
 - **Método de Newton**
 - **Variantes del método de Newton**
 - **Método de Müller**
- **Sistemas de ecuaciones no lineales**
- **Mínimos cuadrados no lineales**





Sistemas de una ecuación y una variable

Método de la Bisección (Bernhard Bolzano, 1781-1848)

- Recordemos el **teorema del valor intermedio**.

Teorema 1 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$ y $f(a) \leq x \leq f(b)$ o $f(b) \leq x \leq f(a)$, existe un punto c tal que $a \leq c \leq b$ en el cual $f(c) = x$.

- **La idea básica** de este método es:

Si la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y en sus extremos cambia de signo, $f(a)f(b) < 0$, existirá un $a < c < b$ en el que $f(c) = 0$; reduciendo convenientemente el intervalo $[a, b]$ se llegará a acotar el valor de c tanto como se desee.



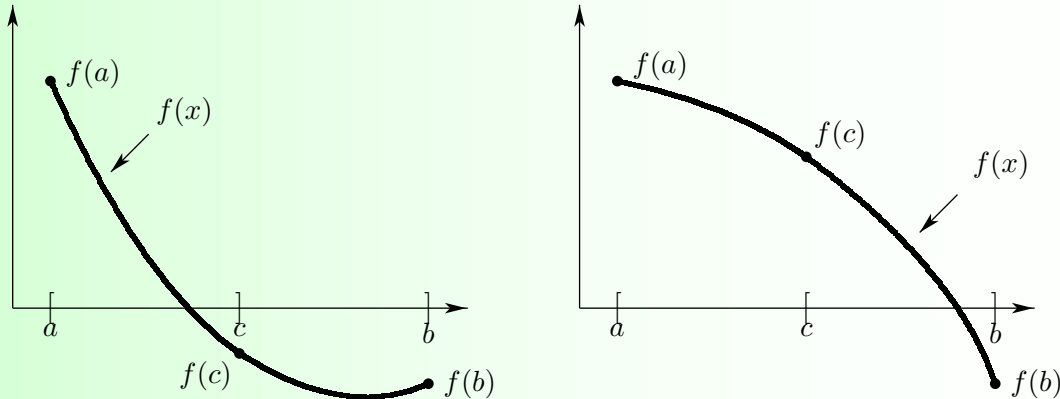


– Mecánica de método:

1. Si al comienzo $u = f(a)$ y $v = f(b)$, tales que $uv < 0$, se determina $c = \frac{1}{2}(a + b)$ y se calcula $w = f(c)$.
 - Si $f(c) = 0$ se ha llegado a la solución buscada;
 - si no, se cumplirá que $wu < 0$ o $wv < 0$.
2. Si $wu < 0$, la solución estará en $[a, c]$; si $wv < 0$, en $[c, b]$.
3. De acuerdo con el resultado obtenido se comienza a estudiar el nuevo intervalo, reduciéndolo iterativamente en dos mitades hasta que se estreche lo que se desee el intervalo que contenga la solución.



- Los dos casos que se pueden presentar en la primera iteración del método son los siguientes.



- Si el intervalo con que se empieza el proceso iterativo, $[a_0, b_0]$, contiene una solución r , usando como estimación de ésta $c_0 = (a_0 + b_0)/2$, se tendrá que

$$|r - c_0| \leq \frac{b_0 - a_0}{2}.$$

- En cualquier iteración, razonando de forma similar,

$$|r - c_i| \leq \frac{b_i - a_i}{2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Teorema 2 *Si se aplica el método de la bisección a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un intervalo $[a, b]$, donde $f(a)f(b) < 0$, después de n iteraciones se habrá obtenido un valor de la solución c_n tal que*

$$|r - c_n| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}},$$

donde r es el valor real de la solución.

- A continuación se lista un programa en Matlab que calcula mediante este método la solución de $x \operatorname{sen}(x) - 1 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ (radianes).



```
function Bisec
% Bisección
tol=eps('single');
a=1; b=2;
fa=fx(a); fb=fx(b);
if fa*fb>0 disp(' En (a,b) no está la solución\n'), end
while abs(a-b)>tol
    c=(a+b)/2;
    fc = fx(c);
    if fc==0 a=c; b=c;
    elseif fb*fc>0 b=c; fb=fc;
        else a=c; fa=fc;
    end
    fprintf(' %17.15f %17.15f\n',a,b);
end

function f=fx(x)
f=x*sin(x)-1;
```





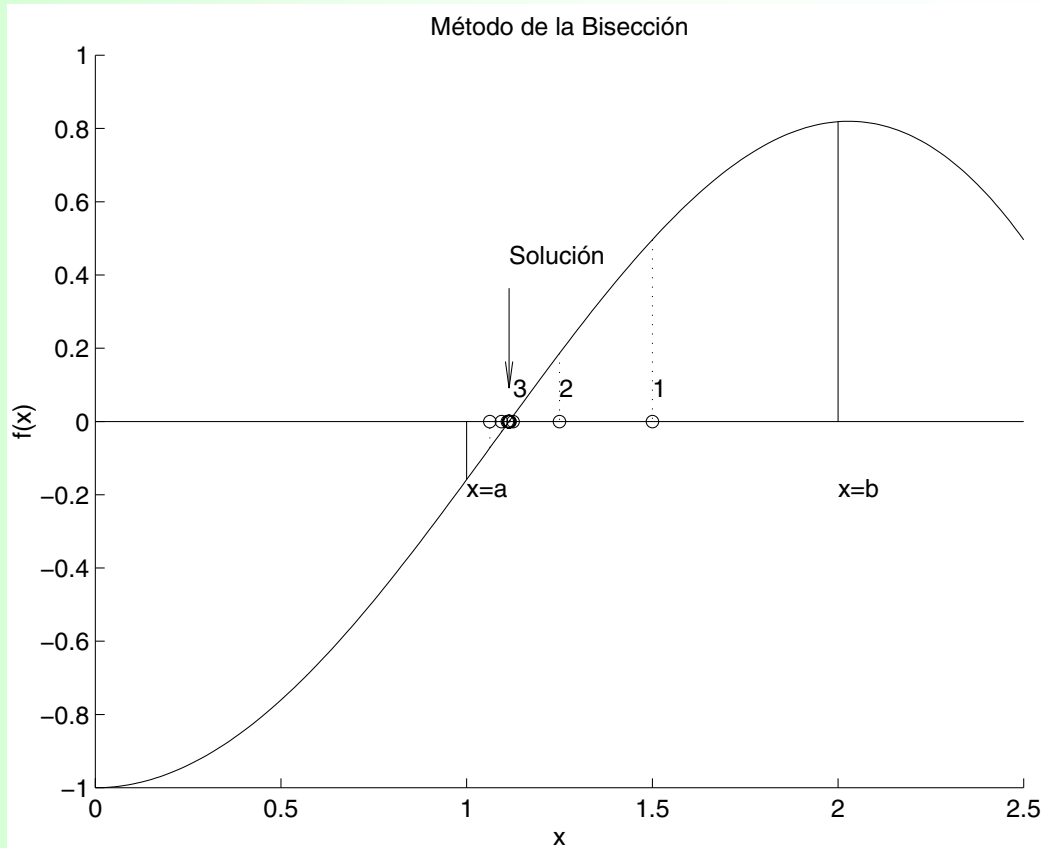
- Los valores de los extremos del intervalo $[a, b]$ que se obtienen con este código en las distintas iteraciones son los que describe esta tabla.

k	a	b	k	a	b
1	1,000000000000	1,500000000000	11	1,1137695312500	1,1142578125000
2	1,000000000000	1,250000000000	12	1,1140136718750	1,1142578125000
3	1,000000000000	1,125000000000	13	1,1141357421875	1,1142578125000
4	1,062500000000	1,125000000000	14	1,1141357421875	1,1141967773437
5	1,093750000000	1,125000000000	15	1,1141357421875	1,1141662597656
6	1,109375000000	1,125000000000	16	1,1141510009765	1,1141662597656
7	1,109375000000	1,117187500000	17	1,1141510009765	1,1141586303710
8	1,113281250000	1,117187500000	18	1,1141548156738	1,1141586303710
9	1,113281250000	1,115234375000	19	1,1141567230224	1,1141586303710
10	1,113281250000	1,114257812500	20	1,1141567230224	1,1141576766967





- En la figura se representa cómo procede el método para llegar a la solución.





Método de Newton-Raphson

– Consideremos la ecuación

$$x^3 - \text{sen}(x) = 0.$$

Al ser una función senoidal, serán varias sus raíces o puntos para los cuales $f(x) = 0$. Calcularemos **la más próxima a $x = 1$** .

– Escribamos la ecuación en la forma $x = g(x)$ y procedamos a aplicarle un procedimiento iterativo basándonos en una relación de recurrencia del tipo $x_{k+1} = g(x_k)$.

- **¿Qué formas de $x = g(x)$ podemos utilizar?**





– **La primera podría ser:**

$$x = \sqrt[3]{\text{sen}(x)}.$$

La relación de recurrencia correspondiente sería, por tanto,

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{\text{sen}(x_k)}.$$

- Si comenzamos el proceso iterativo desde $x_0 = 1$ (radianes), se tendrá que:

$$x_1 = \sqrt[3]{\text{sen}(x_0)} = 0,944; \quad x_2 = \sqrt[3]{\text{sen}(0,944)} = 0,932$$

$$x_3 = \sqrt[3]{\text{sen}(0,932)} = 0,929;$$

y así sucesivamente. La solución converge a $x^* = 0,92862$.





– Si en vez de utilizar $x = \sqrt[3]{\sin(x)}$, hubiésemos hecho

$$x = \frac{\sin(x)}{x^2},$$

utilizando, por tanto, la **relación de recurrencia**

$$x_{k+1} = \frac{\sin(x_k)}{x_k^2},$$

partiendo de $x_0 = 1$, se hubiesen obtenido los puntos de la siguiente tabla.

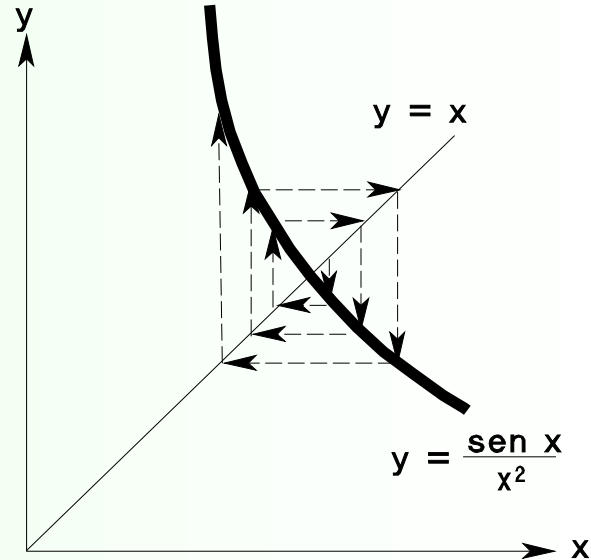
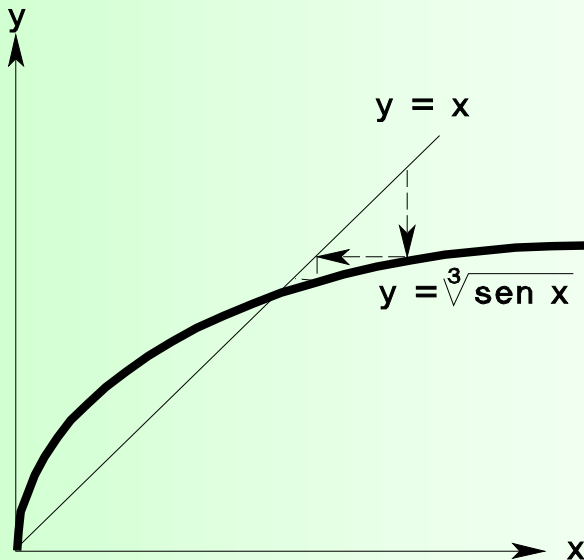
k	x_k
0	1,000
1	0,841
2	1,053
3	0,783
4	1,149
⋮	⋮

El proceso diverge.



– **Veamos gráficamente qué ocurre** en estos dos procesos iterativos:

- El que define la relación de recurrencia $x_{k+1} = \frac{\text{sen}(x_k)}{x_k^2}$ genera lo que se ha dado en llamar una **tela de araña** entre la recta $y = x$ y la curva $y = g(x)$;
- el otro, las formas más suaves de la parte izquierda.





- Si se experimenta con diversas relaciones de recurrencia se puede deducir que el comportamiento del proceso iterativo que generan está relacionado con las pendientes de g en las proximidades de la raíz x^* :

Si $|g'(x^*)| < 1$ y el punto de partida está **cerca** de x^* , el proceso converge. Si $|g'(x^*)| > 1$, diverge.

- En el caso de $x_{k+1} = \sqrt[3]{\text{sen}(x_k)}$,

$$g'(x) = \frac{(\text{sen}(x))^{-2/3}}{3} \cos(x);$$

en $x^* \approx 0,929$, $g'(0,929) \approx 0,23$.

- Por el contrario, en $x_{k+1} = \text{sen}(x_k)/x_k^2$,

$$g'(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} - 2\frac{\text{sen}(x)}{x^3};$$

en $x^* \approx 0,929$, $g'(0,929) \approx -1,23$.





– De acuerdo con estas consideraciones, **es necesario**:

Disponer de una vía sistemática y fiable de construir un modelo $x = g(x)$ para hallar la solución de la ecuación $f(x) = 0$ comenzando desde cualquier x_0 .

– **Isaac Newton (1642-1727)**, un personaje con una de las mentes más portentosas que ha dado la humanidad, fue el primero que ideó esa vía en el siglo XVII y la forma de llevarla a la práctica sencillamente.





– Su método consiste en **reemplazar la función $f(x)$ en cada punto** del proceso iterativo **por el modelo de ella que define la recta tangente a $f(x)$ en ese punto** —linealizar la función en un punto—.

- En un punto dado, $x = x_1$, la ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ es

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1). \quad (2)$$

En $x = x_1$, $y = f(x_1)$ por lo que la ordenada de (2) en x_1 es la misma que la de f . La pendiente de f en x_1 es la misma que la de y : $f'(x_1)$.

- **El siguiente punto del proceso iterativo** que define el método de Newton lo determina **la solución de $y(x) = 0$** , es decir, dónde esa recta tangente corta al eje x :

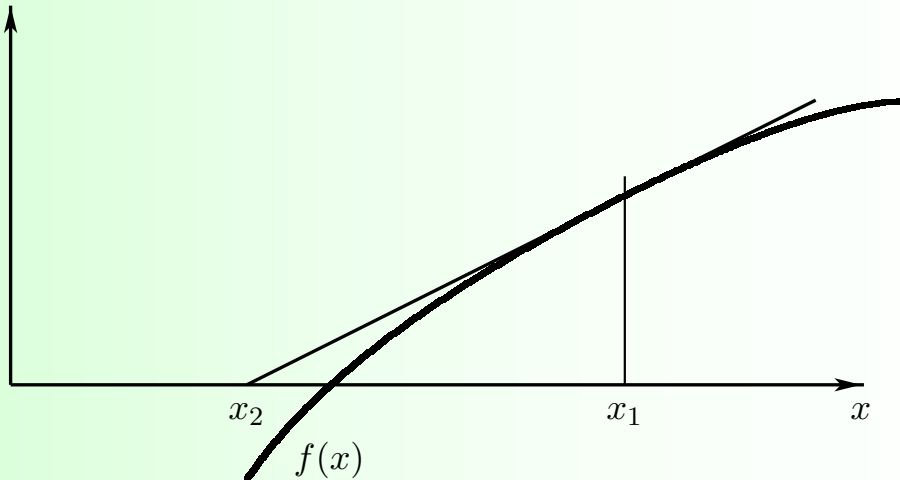
$$0 = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1). \quad (3)$$



– La solución de esta última expresión es

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

– En la figura se describe gráficamente este paso del proceso iterativo de Newton.





- La relación general de recurrencia del método de Newton (o Newton-Raphson) para encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$ es, por consiguiente,

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$





- Si aplicamos el método de Newton al problema anterior,

$$x^3 - \text{sen}(x) = 0,$$

la relación de recurrencia es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - \text{sen}(x_k)}{3x_k^2 - \text{cos}(x_k)}.$$

- En los términos en que nos expresábamos al comienzo de este apartado (recordemos la relación $x = g(x)$), el método de Newton hace

$$g_N(x) = x - \frac{x^3 - \text{sen}(x)}{3x^2 - \text{cos}(x)}.$$



- A continuación se lista un pequeño código en MATLAB para resolver $x^3 - \sin(x) = 0$ por el método de Newton, partiendo de $x_0 = 1,4$.

```
%nm222 Newton
x0=0;
x=1.4;
while (abs(x-x0)>eps)
    x0=x;
    x=x0-(x0^3-sin(x0))/(3*x0*x0-cos(x0));
    fprintf(' %15.12f\n',x);
end
```

- Los puntos que se obtienen con el código son los de la tabla que sigue.

k	x_k
1	1.092024491974
2	0.958975041400
3	0.929997813651
4	0.928629313033
5	0.928626308746
6	0.928626308732



Convergencia del método de Newton para una variable

- Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que satisface la **condición de Lipschitz** con constante γ en un conjunto X , si para todo x e y pertenecientes a X se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq \gamma|x - y|.$$

Una función que satisface la condición de Lipschitz en un conjunto X se dice **continua γ -Lipschitz** en ese X , designándose $f \in \text{Lip}_\gamma(X)$.

Lema 3 Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con dominio de definición en un intervalo abierto D cumpliéndose que $f' \in \text{Lip}_\gamma(D)$. Para todo $x, y \in D$,

$$|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)| \leq \frac{\gamma|y - x|^2}{2}. \quad (4)$$

- Obsérvese que (4) se asemeja al error de la aproximación de f por desarrollo en serie de Taylor, truncándolo en $r = 2$, con la constante γ en vez de $f''(\xi)$, $\xi \in D$.
 - Al usar la continuidad Lipschitz no se necesita tener en cuenta los términos de derivadas segundas.



Teorema 4 Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con dominio de definición en un intervalo abierto D cumpliéndose que $f' \in \text{Lip}_\gamma(D)$. Supóngase que para algún $\rho > 0$, $|f'(x)| \geq \rho$ para todo $x \in D$. Si $f(x) = 0$ tiene solución, x^* , existe algún $\eta > 0$ tal que si $|x_0 - x^*| < \eta$ la sucesión $\{x_k\}$ que genera la relación de recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

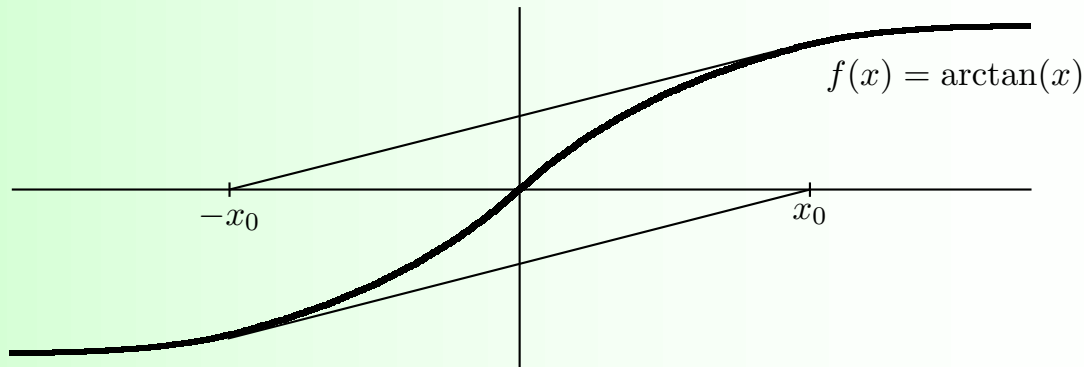
converge a x^* . Además,

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{\gamma}{2\rho} |x_k - x^*|^2; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

- **El teorema garantiza la convergencia del método de Newton sólo si se inicia el proceso desde un punto x_0 aceptable.**

– Es fácilmente comprobable que **el método puede no funcionar si $|x_0 - x^*|$ es grande:**

- Por ejemplo, considérese el problema clásico de hallar la solución de $\arctan(x) = 0$.
 - Partiendo de cualquier punto del intervalo $[1,39, 1,40]$, el método cicla obteniéndose $x_1 = -x_0, x_2 = x_0, x_3 = -x_0, \dots$
 - Si $x_0 < 1,39$, el procedimiento converge; si $x_0 > 1,40$, diverge. En la figura se representan estas circunstancias.



– La condición expuesta en el teorema de que $f'(x)$ esté acotada inferiormente en D , significa que $f'(x^*)$ **debe ser distinta de cero para que el método de Newton converja cuadráticamente a ese valor x^* .**

- Si $f'(x^*) = 0$, entonces x^* es una raíz múltiple y el método sólo convergería linealmente.
 - Para apreciar la diferencia, si aplicamos el método de Newton para resolver $f_1(x) = x^2 - 1 = 0$ y $f_2(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$, partiendo de $x_0 = 2$, los primeros puntos que resultan son los de la tabla que sigue.

$f_1(x) = x^2 - 1 = 0$		$f_2(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$
2	x_0	2
1,25	x_1	1,5
1,025	x_2	1,25
1,0003048780488	x_3	1,125
1,0000000464611	x_4	1,0625
1,0	x_5	1,03125

Variantes del método de Newton

- La primeras variantes resultan de **incorporar algún mecanismo que impida que ocurran los problemas mencionados** en el apartado anterior.
- **Recordemos** que la resolución de la ecuación de Newton no sólo define un **nuevo punto** del proceso iterativo, x_{k+1} , sino una **dirección**, $f'(x_k)$, a lo largo de la cual se da un **paso** (determinado por $x_{k+1} - x_k$):
 - Puede que ese paso sea el adecuado y la función $f(x)$ en el nuevo punto adquiera un valor menor que el que tenía en x_k ; pero también lo contrario y el proceso diverja, siendo en cualquier caso buena la dirección calculada, pues a lo largo de ella la función decrece en ciertos puntos.

- **Incorporemos un mecanismo de salvaguarda** que permita, a lo largo de la dirección calculada, moviéndose un paso adecuado, **disminuir siempre el valor de la función**; en concreto,

Si el paso completo $x_{k+1} - x_k$ produce un aumento, disminuirlo hasta que $|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$.

- Ese posible mecanismo lo plasma el algoritmo que sigue.

```

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
while ( $|f(x_{k+1})| \geq |f(x_k)|$ ) do  
     $x_{k+1} \leftarrow \frac{x_{k+1} + x_k}{2}$   
end
```




Método de Newton por diferencias finitas

– Hasta ahora **hemos supuesto que se conoce la expresión de la derivada de la función $f(x)$** , y por tanto, es fácilmente evaluable en un determinado punto.

- No siempre es así:
 - Bien porque su determinación analítica es muy complicada –la función $f(x)$ surge de un procedimiento experimental, por ejemplo–, o,
 - Porque el usuario del método no desea obtenerla.

– La siguiente variante del método de Newton – **Newton por diferencias finitas**– surge de **sustituir la derivada de la función $f(x)$ por su definición**:

$$f'(x_k) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h},$$

utilizándola en la fórmula de recurrencia.





- **La elección de h es crítica** para el buen funcionamiento del procedimiento. Si se hace

$$a_k = (f(x_k + h) - f(x_k))/h,$$

la relación de recurrencia del método de Newton queda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k}.$$



Teorema 5 Sea la función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con dominio de definición en un intervalo abierto D siendo $f' \in \text{Lip}_\gamma(D)$. Supóngase que, para todo $x \in D$, $|f'(x)| \geq \rho$ para algún $\rho > 0$. Si $f(x) = 0$ tiene solución $x^* \in D$, existen unas constantes positivas η y η' tales que si $\{h_k\}$ es una sucesión de números reales tales que $0 < |h_k| \leq \eta'$ y si $|x_0 - x^*| < \eta$, la sucesión $\{x_k\}$ que define

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_k}, \quad \text{con } a_k = \frac{f(x_k + h_k) - f(x_k)}{h_k}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

converge linealmente a x^* . Si $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$, la **convergencia es superlineal**. Si existe alguna constante c_1 tal que

$$|h_k| \leq c_1 |x_k - x^*|,$$

o, de forma equivalente, una constante c_2 tal que

$$|h_k| \leq c_2 |f(x_k)|,$$

la **convergencia es cuadrática**. Si existe alguna constante c_3 tal que

$$|h_k| \leq c_3 |x_k - x_{k-1}|,$$

la convergencia es al menos **cuadrática cada dos pasos**.



- El parámetro h **se debe escoger no muy pequeño** de tal manera que

$$fl(x_k + h) \neq fl(x_k)$$

o que, dado que f es continua y su derivada también, al evaluar la función en dos puntos muy próximos, que

$$fl(f(x_k + h)) \neq fl(f(x_k)).$$

- **Una regla que se suele usar** habitualmente consiste en elegir

$$|h| = \sqrt{\epsilon} \text{máx}\{\text{tip } x, |x_k|\},$$

donde $\text{tip } x$ indica la magnitud típica de x y ϵ es la precisión de la máquina en la que se utiliza el correspondiente código.

- Para un **problema bien escalado** bastaría hacer

$$|h| = \sqrt{\epsilon_{\text{máq.}}}$$





- **Cuando existen problemas de precisión**, también es posible recurrir a la aproximación de $f'(x_k)$ dada por

$$a_k = \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h}.$$

¡OJO! El número de veces que se evalúa la función se duplica con respecto al anterior.

Ejemplo

- Calculemos la solución de $f(x) = x^2 - 1$, partiendo de $x = 2$, mediante Newton y Newton por diferencias finitas.

```
%nm333 Newton
function nm333
x1=2.0; x0=0.0;
while abs(fx(x1))>eps
    x0=x1;
    x1=x0-fx(x0)/derfx(x0);
    fprintf(' %18.15f\n', x1);
end

function [y] = fx(x)
y=x^2-1;

function [j] = derfx(x)
j=2*x;
```

```
%nm334 Newton
function nm334
global h
x1=2.0; x0=0.0; h=sqrt(eps);
while abs(fx(x1))>eps
    x0=x1;
    x1=x0-fx(x0)/derfx(x0);
    fprintf(' %18.15f\n', x1);
end

function [y] = fx(x)
y=x^2-1;

function [j] = derfx(x)
global h
j=(fx(x+h)-fx(x))/h;
```



- Los resultados obtenidos con uno y otro código son los de la siguiente tabla.

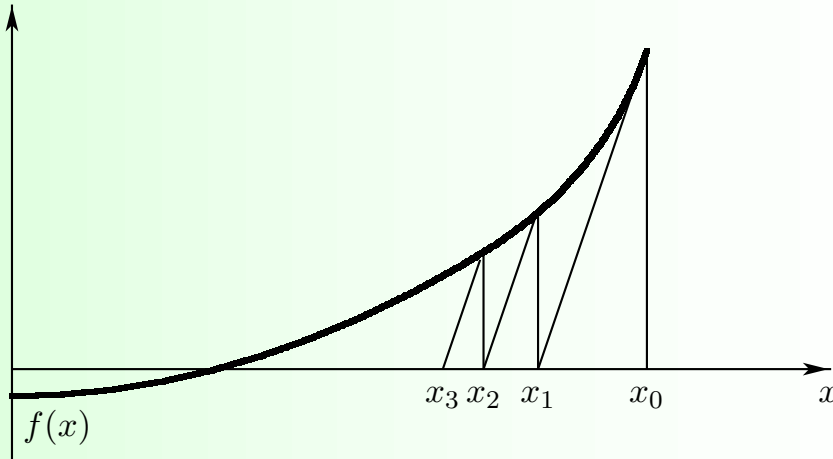
Newton		Newton Dif. Fin.
1.2500000000000000	x_0	1.2500000000000000
1.0250000000000000	x_1	1.025000001341105
1.000304878048780	x_2	1.000304878371890
1.000000046461147	x_3	1.000000046463329
1.0000000000000001	x_4	1.0000000000000001
1.0000000000000000	x_5	1.0000000000000000

Como se puede observar, son prácticamente los mismos.

- En la práctica el método de Newton y el de Newton por diferencias finitas funcionan casi igual, si se acondicionan los parámetros convenientemente.

Método de Newton modificado

- Este método utiliza como dirección de búsqueda no aquella que determina $f'(x_k)$ en cada iteración k , sino siempre la misma: $f'(x_0)$. La figura ilustra la mecánica de esta variante.



- Como se puede intuir, si la pendiente de f en x_0 difiere de una forma apreciable de la de f en la solución, la convergencia puede ser muy lenta o no existir. **Para evitar esta dificultad, la derivada de la función se puede reevaluar cada número fijo de iteraciones.**



- Si se utiliza el método de Newton modificado para resolver $x^3 - \sin(x) = 0$, partiendo de $x_0 = 1$, los puntos del proceso que se obtienen son los de la tabla.

k	x_k
0	1.0000000000000000
1	0.935549390654669
2	0.929891418943678
3	0.928866791031700
4	0.928672340894173
5	0.928635131620788
6	0.928628000221848
7	0.928626633033293
8	0.928626370909143
9	0.928626320652852
10	0.928626311017341
11	0.928626309169948
12	0.928626308815752
13	0.928626308747843
14	0.928626308734823
15	0.928626308732327
16	0.928626308731848
17	0.928626308731756
18	0.928626308731739
19	0.928626308731735

- La convergencia en este caso es razonablemente rápida, aunque un poco peor que la del método de Newton. Éste llegaba a una solución con 6 dígitos significativos en 6 iteraciones, el modificado lo hace en 7.





- El código de Matlab que se ha utilizado para obtener la solución es el que se lista a continuación.

```
%nm335 Newton
function nm335
x1=1.0; dx=3*x1*x1-cos(x1);x2=x1-fx(x1)/dx;
while (abs(fx(x2))>eps)
    fprintf('  %18.15f\n', x1);
    x1=x2;
    x2=x1-fx(x1)/dx;
end

function [y] = fx(x)
y=x^3-sin(x);
```



Método de la secante

- Este método se basa en utilizar como dirección de búsqueda, **en vez de la tangente que define el método de Newton, la que determina una recta secante a la función en dos puntos sucesivos del proceso iterativo.**
- Es decir, si en una iteración k del proceso la ecuación de Newton es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

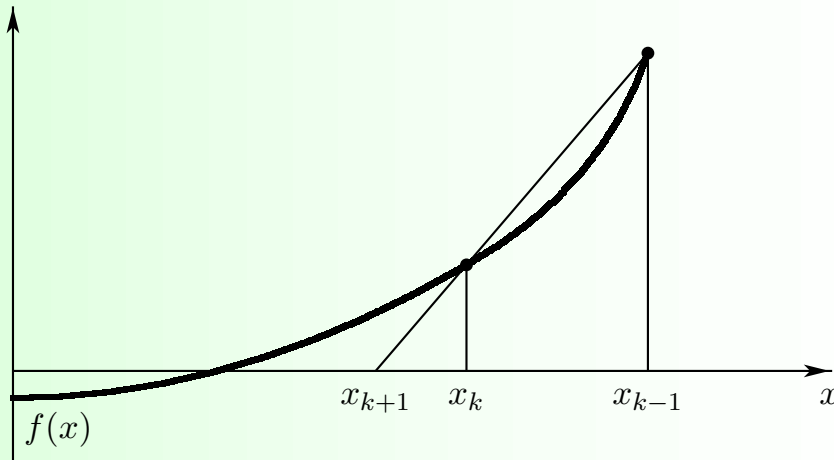
la idea es emplear, en vez de $f'(x_k)$,

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

- La relación de recurrencia del proceso iterativo queda

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k).$$

- La figura ilustra esta aproximación.



- El método de la secante **converge superlinealmente** siendo el orden $(1 + \sqrt{5})/2 = 1,618$: la denominada **razón áurea**.



Ejemplo

– Resolvamos $x^3 - \sin(x) = 0$ con este método y Matlab.

```
function New_secante
x0=1.2; x1=1.1; x2=1.05;
while abs(fx(x2))>eps
    x0=x1; x1=x2;
    x2=x1-fx(x1)/secfx(x0,x1);
    fprintf(' %18.15f\n', x2);
end

function [y] = fx(x)
y=x^3-sin(x);

function [j] = secfx(x0,x1)
j=(fx(x1)-fx(x0))/(x1-x0);
```

– La convergencia, partiendo de $x_0 = 1,1$ y $x_1 = 1,05$ es la que sigue.

k	x_k
1	0.939801893672403
2	0.929784003882567
3	0.928646727029674
4	0.928626346559867
5	0.928626308732972
6	0.928626308731734



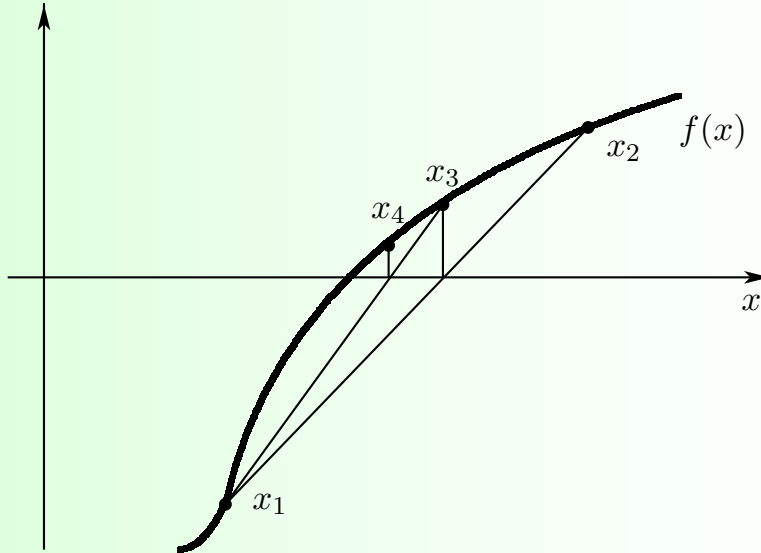


Método de la falsa posición

- Este método, conocido como **Regula Falsi**, al igual que el de la secante, en vez de la tangente que define el método de Newton, utiliza como **dirección de búsqueda una recta secante a la función en dos puntos sucesivos del proceso iterativo.**
- Lo que le **diferencia del de la secante** es que esa dirección de búsqueda, siguiendo una estrategia similar a la del método de la bisección, la deben determinar los **dos últimos puntos del proceso iterativo en los que la función toma valores de signo opuesto.**



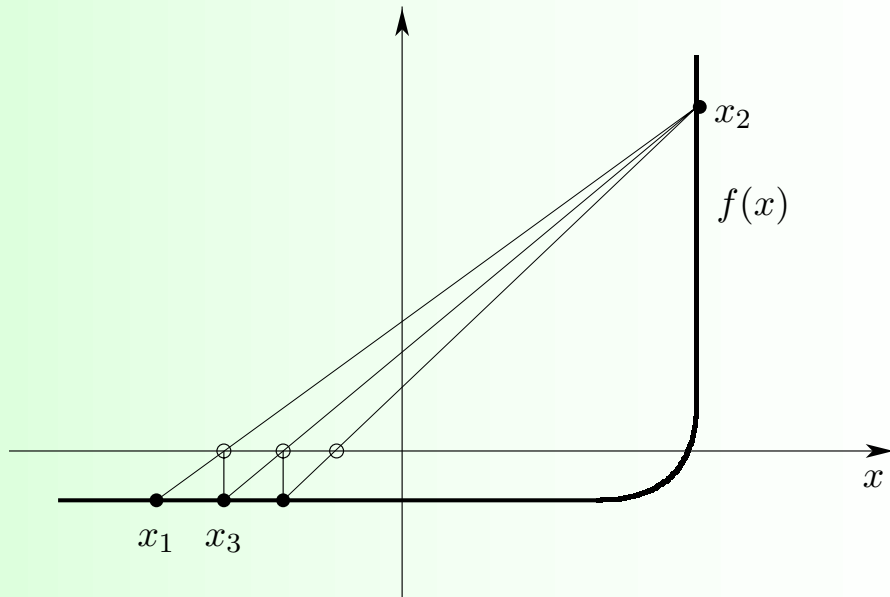
– La figura describe esta forma de abordar el problema.



– La **convergencia es superlineal** de orden 1,618: la razón áurea.



- En determinadas circunstancias desfavorables, tanto el método de la secante como el de la falsa posición pueden presentar problemas de convergencia.
- En la figura se representa un caso de convergencia lenta.



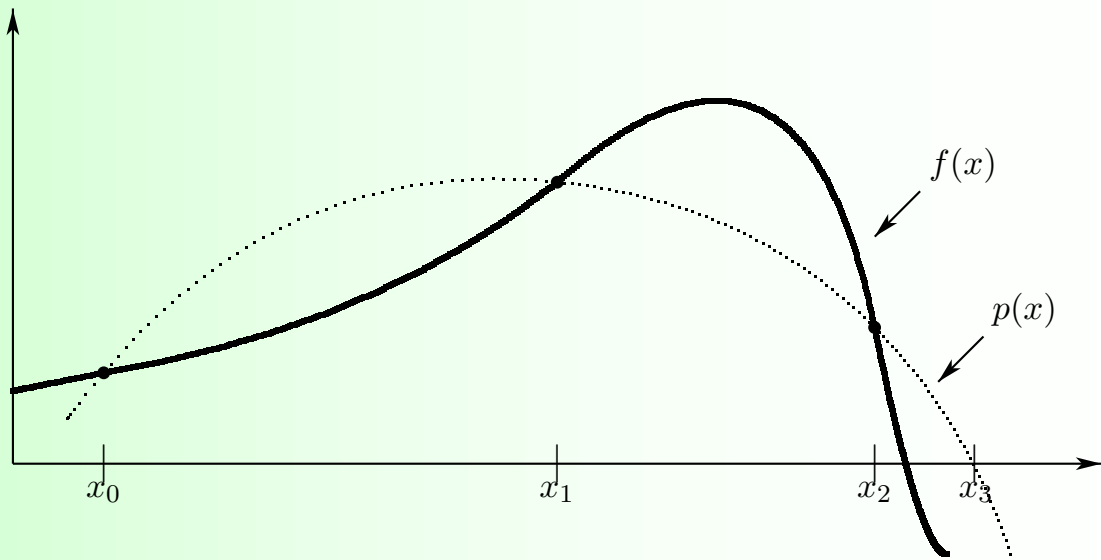


Método de Müller

- Este método, presentado por primera vez por D.E. Müller en 1956, es una generalización del método de la secante.
- Utiliza una **interpolación cuadrática de tres puntos del proceso iterativo** que busca la solución para, a partir de las raíces de esa interpolación, definir un nuevo punto del proceso.



- La figura describe el proceso que sigue el método de Müller en una iteración genérica.





- Si se consideran los puntos x_0 , x_1 y x_2 , el procedimiento aproxima a estos puntos el polinomio cuadrático

$$p(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

que pasa por $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

- Los parámetros a , b y c de ese polinomio se determinan a partir de las siguientes condiciones:

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) + c,$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + c$$

y

$$f(x_2) = c.$$





– Resolviendo el sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$$\begin{bmatrix} (x_0 - x_2)^2 & (x_0 - x_2) \\ (x_1 - x_2)^2 & (x_1 - x_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) - f(x_2) \\ f(x_1) - f(x_2) \end{bmatrix}$$

se obtiene la expresión de los parámetros a y b . Es

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} \begin{bmatrix} (x_1 - x_2) & -(x_0 - x_2) \\ -(x_1 - x_2)^2 & (x_0 - x_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) - f(x_2) \\ f(x_1) - f(x_2) \end{bmatrix}.$$

– Para determinar el nuevo punto del proceso, x_3 , se aplica la fórmula

$$z = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}, \quad (6)$$

con el fin de calcular las raíces de $p(x)$, escogiéndose para **garantizar la estabilidad numérica** del método, de las dos posibles, aquella que tiene un menor valor absoluto: **denominador más grande**.

- Para ello, si $b > 0$ se usa el signo positivo en la expresión (6); si $b < 0$, el negativo.





- El nuevo punto x_3 será entonces

$$x_3 = x_2 + z.$$

- Una vez obtenido este punto, el procedimiento se reinicia utilizando como nuevos tres puntos x_3 y, de entre x_0 , x_1 y x_2 , los dos más próximos a él.
- Evidentemente, cuando sea necesario, el método deberá aproximar raíces complejas.
- A continuación se lista un programa de Matlab para resolver $x^3 - \sin(x) = 0$ por el método de Müller . La versión programada sólo calcula raíces reales.





```
% Muller
function Muller
tol=eps('double');
x0=1.5; x1=1.2; x2=1.0;
fx0=fx(x0); fx1=fx(x1); fx2=fx(x2); iter=1;
while abs(fx2)>tol
    c=fx2;
    d0=x0-x2; d1=x1-x2;
    det=d0*d1*(x0-x1);
    b=(d0*d0*(fx1-fx2)-d1*d1*(fx0-fx2))/det;
    a=(d1*(fx0-fx2)-d0*(fx1-fx2))/det;
    di=sqrt(b*b-4*a*c);
    isig=1; if b<0 isig=-1; end
    z=(-2)*c/(b+isig*di);
    x3=x2+z;
    if abs(x3-x1)<abs(x3-x0)
        u=x1; x1=x0; x0=u;
        u=fx1; fx1=fx0; fx0=u;
    end
    if abs(x3-x2)<abs(x3-x1)
        u=x2; x1=u;
        u=fx2; fx1=u;
    end
    x2=x3;
    fx2=fx(x2);
    fprintf('%17.14f+%17.14fi %23.15f %4.0f\n',real(x2),imag(x2),fx2,iter);
    iter=iter+1;
end

function f=fx(x)
f=x^3-sin(x);
```



- El proceso de convergencia de la resolución del problema partiendo de $x_0 = 1,5$, $x_1 = 1,2$ y $x_2 = 1,0$ es el que describe la siguiente tabla.

k	x_k	$f(x_k)$
1	0,921801501077277	-1,342037938307839e-02
2	0,928699331903730	1,451947876007775e-04
3	0,928626328365127	3,903326339926849e-08
4	0,928626308731740	1,076916333886402e-14
5	0,928626308731734	-1,110223024625157e-16

- Obsérvese que el número de iteraciones, para la precisión que se obtiene, decrece apreciablemente comparándolo con el de otros métodos.