Día de π - 3/14/2022
Concurso de problemas

Resuelve los siguientes dos retos matemáticos y envía tus soluciones antes del **lunes 7 de marzo de 2022, a las 14:03 horas** a

`pedro.gmanchon@upm.es` o `carmen.garciamiguel@upm.es`

¡Podrás ganar una magnífica tablet!

Bases del concurso

1. Podrá participar cualquier alumno de grado o máster matriculado en la UPM durante el curso actual.
2. Se valorará la originalidad en el enfoque de cada problema (aunque no tengan una solución completa) y la claridad en la presentación.
3. El formato de la solución será necesariamente un único documento PDF. En la cabecera deberá figurar la siguiente información:
   - Nombre y apellidos.
   - Grado/Máster y Escuela.
   - Dirección de correo electrónico.
   - Un número de teléfono (opcional).
4. Información extra y más sobre la celebración del Día de π, en `http://dmaii.etsii.upm.es/web/dia-de-pi/`

Primer reto Pi 2022

El número π aparece en muchísimas partes. Aquí lo vamos a descubrir en integrales. Definimos, para $x > 0$ e $y > 0$, la función

$$F(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

1. Demuestra que

$$F(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta.$$

2. Definimos, para $x > 0$, otra función

$$f(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   Demuestra la relación

$$f(x)f(y) = f(x+y)F(x, y).$$

3. Demuestra que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Segundo reto Pi 2022

Puedes imaginar un nudo matemático *anudando* un cordón de los zapatos y pegando después sus extremos entre sí. Un nudo puede representarse mediante diagramas planos. Puedes ver dos de estos diagramas en la siguiente figura:

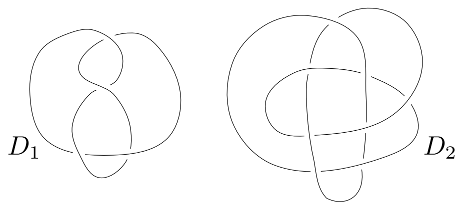

Figura 1: Diagramas de nudos D_1 y D_2

A partir de un diagrama D de un nudo podemos construir una superficie $S(D)$ de la siguiente manera: por cada cruce en el diagrama colocamos un pequeño cuadrado, y por cada arista del diagrama añadimos un rectángulo conectando los cuadrados que corresponden a los cruces extremos de la arista, según indica el dibujo.

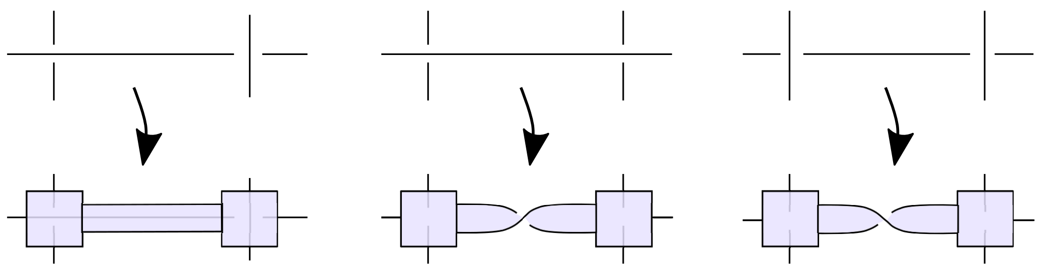

Figura 2: Trozos de superficie correspondientes a aristas alternante (izquierda) y no alternantes (central y derecha)

Es importante darse cuenta de que hemos *twistado* el rectángulo cuando éste se corresponde con una arista no alternante. Y es importante observar hacia qué lado hemos realizamos el *twist*. Por ejemplo, aquí puedes ver un diagrama (con aristas alternantes y no alternantes) y su superficie correspondiente:

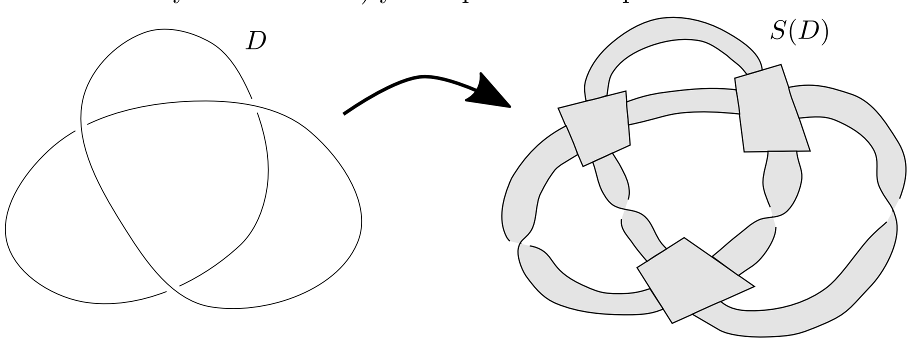

Figura 3: Un ejemplo de diagrama D (con seis aristas) y la superficie correspondiente $S(D)$

En primer lugar veamos si tus clases de dibujo artístico merecieron la pena:

1. Dibuja las superficies $S(D)$ que se corresponden con los diagramas de la Figura 1.
2. Comprueba que dichas superficies son orientables, es decir, cada una de ellas tiene dos lados (digamos un anverso y un reverso). Para ello puedes colorear cada lado con un color diferente (si por un momento piensas que cualquier superficie es orientable, puedes mirar en la Wikipedia lo que le ocurre a nuestra querida banda de Moebius).

Ahora se trata de razonar sobre este tipo de superficies $S(D)$ en general. A ver qué tal se nos da:

3. Demuestra que, no importa de qué diagrama D partas, la superficie $S(D)$ construida será siempre orientable.
4. La frontera o borde de la superficie $S(D)$ está formada por N curvas cerradas simples (por ejemplo, $N = 3$ para la superficie $S(D)$ de la Figura 3). ¿Qué relación hay entre este número N y el número c de cruces del diagrama D, *cuando el diagrama D es alternante*? Que el diagrama del nudo sea alternante significa que todas sus aristas son alternantes; con otras palabras, el diagrama puede recorrerse alternando el paso por encima/por debajo.

Solución primer reto

1. En el primer ejercicio basta con hacer la transformación $t = \sin^2\theta$. En ese caso tenemos que $dt = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$ y si t varía de 0 a 1, entonces θ varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1}(1-\sin^2\theta)^{y-1} 2\sin\theta\cos\theta d\theta. \end{aligned}$$

   Utilizando la igualdad $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta$

$$\begin{aligned} F(x,y) =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{x-1}(\cos^2\theta)^{y-1}\sin\theta\cos\theta d\theta \\ =& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-2}(\cos\theta)^{2y-2}\sin\theta\cos\theta d\theta, \end{aligned}$$

   lo que finalmente nos lleva al resultado deseado absorbiendo $\sin\theta$ y $\cos\theta$ en las expresiones con los exponentes $2x-2$ y $2y-2$ respectivamente.

2. Este ejercicio es más difícil. Para mostrar la segunda parte vemos primero que

$$f(x)f(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}e^{-s}dtds.$$

   La región $0 \le t \le \infty$, $0 \le s \le \infty$, la podemos describir utilizando las variables $t = uv$ y $s = u(1-v)$ con Jacobiano:

$$\left|\begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial uv} \\ \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix}\right| = -uv - u + uv = -u.$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}s^{y-1}dtds \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{x-1}e^{-uv}[u(1-v)]^{y-1}e^{-u(1-v)}udvdu, \\ &= \int_0^\infty u^{y+x-1}e^{-u}du \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv \\ &= f(x+y)F(x,y). \end{aligned}$$

3. En el último ejercicio se puede utilizar la relación entre f y F, es decir

$$f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1)F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

   Utilizando la expresión de F del primer apartado tenemos que

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

   Por otra parte

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = -e^{-t}|_0^\infty = 1.$$

   Nótese que f es una integral con integrando no negativo, de manera que $f \ge 0$. Por lo que obtenemos de (1) y el resultado $f(1) = 1$ dado que $f \ge 0$ que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Hay una forma alternativa de obtener este resultado partiendo de la definición de f directamente y considerando la transformación $t = u^2$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du,$$

donde la última relación la obtenemos partiendo de que el integrando es par. Ahora la clave consiste en considerar el quadrado de la última integral y pasar a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{-0}^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-0}^{2\pi} \int_0^\infty e^{-t} dt = \pi.\end{aligned}$$

De aquí obtenemos el resultado de antes dado que $f\left(\frac{1}{2}\right)$ es positivo.

La mayoría os habéis dado cuenta que $F(x, y)$ es la función beta y $f(x)$ la función gamma. También muchos os habéis dado cuenta que la integral $f\left(\frac{1}{2}\right)$ es igual a

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2} du,$$

que es conocida como la integral de Gauss, integral gaussiana o integral de probabilidad, dado que el integrando es la función gaussiana e^{-x^2}.

La función beta que suele denotarse por $B(x, y)$ de hecho está definida para números complejos x e y con parte real positiva, es decir para números complejos x e y con $\mathrm{Re}\, x > 0$ y $\mathrm{Re}\, y > 0$. B es la letra mayúscula beta del alfabeto griego. En el problema que habéis resuelto se ha visto la relación que tiene con la función gamma que se denota por $\Gamma(x)$ que también se suele definir para números complejos con parte real positiva. Partiendo de la definición dada aquí, no es difícil demostrar que para números enteros positivos hay una relación directa muy conocida también con el factorial, es decir para $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt = (n-1)!.$$

La demostración se puede hacer por ejemplo por inducción.

Ya que hemos celebrado el día π, de hecho existe la función Π que se llama la función pi y que es

$$\Pi(z) = \Gamma(z+1),$$

que para números enteros positivos n coincide con el factorial, es decir

$$\Pi(n) = n!$$

Solución segundo reto

Apartados 1. y 2. Para construir las superficies lo importante es recordar que sólo las bandas que corresponden a aristas no alternantes deben *twistarse*, y el twist debe hacerse del modo adecuado. Para demostrar que dichas superficies son orientables basta ver que tienen dos lados, que pintamos con diferentes colores (en el primer dibujo el lado azul queda todo por la parte de atrás):

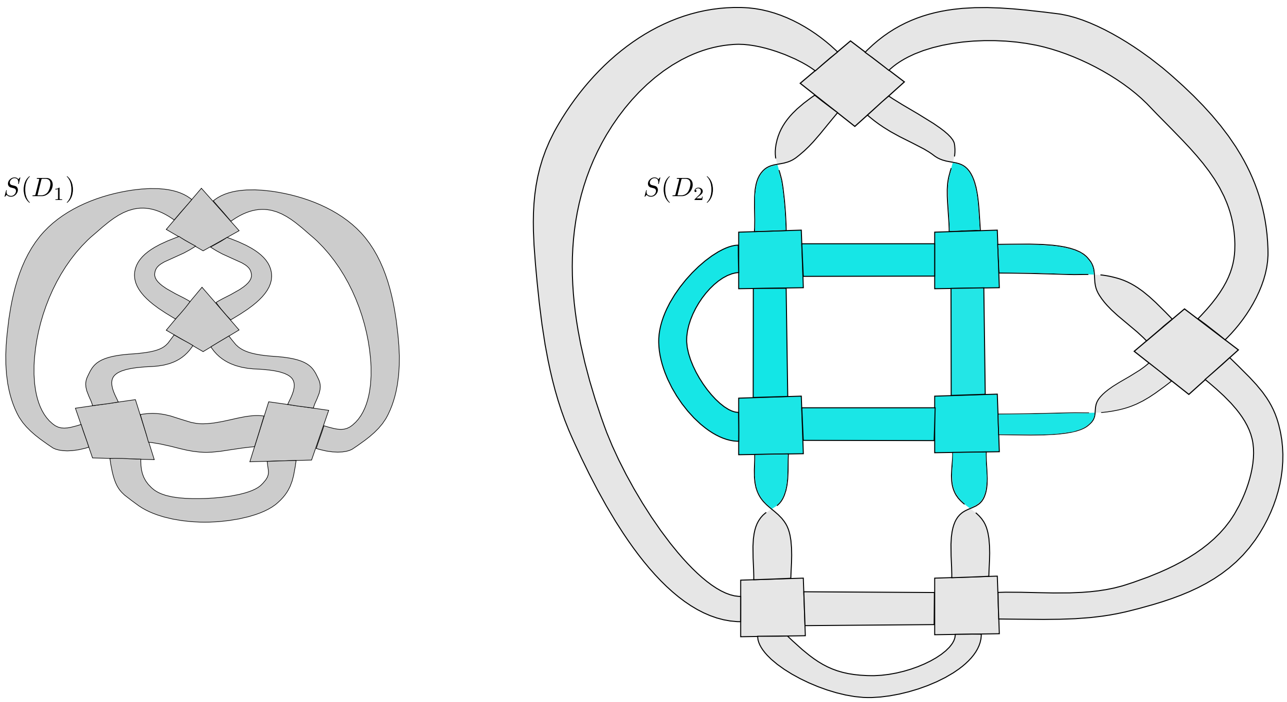

Figura 4: Superficies $S(D)$ para los diagramas D_1 y D_2

Apartado 3. Se trata de ver que cada ciclo de bandas tiene exactamente un número par de aristas twistadas, de manera que no aparece una banda de Möbius. En efecto, si haces un viaje por tu superficie regresando al punto de partida tras haber caminado por un número impar de bandas twistadas -y tal vez algunas otras no twistadas-, comprobarás que el rastro de pintura azul que has ido dejando mancha los dos supuestos *lados* de la superficie. ¡Un momento! No intestes leer de nuevo la frase anterior, que tiene toda la pinta de ser un jeroglífico egipcio de los difíciles. Mejor, construye una superficie de Möbius pegando dos bandas, una plana y otra twistada, y echa a andar por encima de la superficie mientras pintas de azul el terreno por el que pisas...

Ahora bien, para ver que cada ciclo de *bandas* en la superficie $S(D)$ tiene exactamente un número par de aristas twistadas, basta ver que cada ciclo de *aristas* en el diagrama D tiene un número par de aristas no alternantes. Han sido muy curiosas las demostraciones que se han dado de este hecho en las soluciones aportadas. He aquí otro modo de verlo: partiendo de un cruce, recorramos las aristas que rodean una cara del diagrama D, escribiendo signos $+$ o $-$ en cada cruce, dependiendo de si alcanzamos éste mediante una arista que lo alcanza por encima o por debajo, respectivamente. Por ejemplo, al recorrer la cara que indica la Figura 6, escribiríamos el código

$$+-+---$$

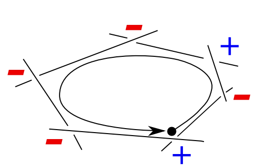

Figura 5: Recorreindo las aristas de una cara y contando signos...

Ahora observamos que una arista alternante tiene en sus extremos el mismo signo, mientras que una no alternante los cambia. Por lo tanto hay tantos cambios de signos como aristas NO alternantes. Como el número de cambios de signos es necesariamente par (porque llegamos al mismo signo del que partimos), tenemos necesariamente un número par de aristas no alternantes.

Apartado 4. Si aún nos quedan fuerzas, veamos cómo demostrar que, si D es un diagrama alternante, entonces el número N de curvas cerradas simples que componen la frontera de $S(D)$ coincide con el número de cruces c del diagrama D más dos, es decir,

$$N = c + 2.$$

Hay una observación que hace esto menos difícil de lo que parece. Y es que, si D es alternante, la superficie $S(D)$ no tiene bandas twistadas, así que podemos dibujarla contenida completamente en nuestra hoja de papel. En consecuencia N resulta ser el número de regiones r que determina el diagrama D (la región de fuera también hay que contarla). Compruébalo en el siguiente dibujo: a la izquierda el diagrama D determina seis regiones; a la derecha la superficie $S(D)$ tiene en su borde seis curvas cerradas simples.

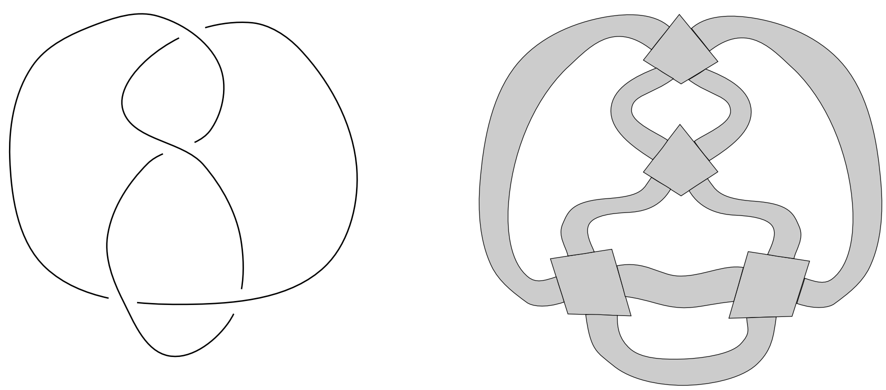

Figura 6: Si D es alternante, $S(D)$ no tiene bandas twistadas.

De manera que es suficiente ver lo siguiente: en un diagrama de un nudo (alternante o no) con c cruces hay necesariamente $r = c+2$ regiones. Hay una argumento, basado en la característica de Euler de la esfera, que da una demostración rápida de este hecho. Pero veamos nosotros una demostración más ad hoc, usando inducción sobre el número de cruces.

Empieza así: si un diagrama no tiene cruces, es un simple círculo y tenemos dos regiones, la de fuera y la de dentro: así que el número de regiones es el número de cruces más dos. Y termina así: supongamos que el número de regiones es dos más el número de caras para todos los diagramas de nudos con $c - 1$ cruces. Tomemos ahora un diagrama con c cruces y r regiones. Queremos ver que $r = c + 2$. A partir de nuestro diagrama D construyamos un diagrama D' muy parecido, salvo que en las cercanías de un cruce este se ha suavizado, conectando dos regiones que antes eran diferentes. Para D' tenemos que $c' = c - 1$ y $r' = r - 1$ (porque dos regiones se han fusionado). Ya que $r' = c' + 2$ por hipótesis de inducción, se sigue que $r - 1 = (c - 1) + 2$, o sea, $r = c + 2$.