# Día de $\pi$ - 3/14/2022
# Concurso de problemas

Resuelve los siguientes dos retos matemáticos y envía tus soluciones antes del **lunes 7 de marzo de 2022, a las 14:03 horas** a

pedro.gmanchon@upm.es o carmen.garciamiguel@upm.es

¡Podrás ganar una magnífica tablet!

Bases del concurso

1. Podrá participar cualquier alumno de grado o máster matriculado en la UPM durante el curso actual.
2. Se valorará la originalidad en el enfoque de cada problema (aunque no tengan una solución completa) y la claridad en la presentación.
3. El formato de la solución será necesariamente un único documento PDF. En la cabecera deberá figurar la siguiente información:
   - Nombre y apellidos.
   - Grado/Máster y Escuela.
   - Dirección de correo electrónico.
   - Un número de teléfono (opcional).
4. Información extra y más sobre la celebración del Día de $\pi$, en http://dmaii.etsii.upm.es/web/dia-de-pi/

## Primer reto Pi 2022

El número $\pi$ aparece en muchísimas partes. Aquí lo vamos a descubrir en integrales. Definimos, para $x > 0$ e $y > 0$, la función

$$F(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$$

1. Demuestra que

$$F(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2x-1}(\cos\theta)^{2y-1}d\theta.$$

2. Definimos, para $x > 0$, otra función

$$f(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt.$$

   Demuestra la relación

$$f(x)f(y) = f(x+y)F(x,y).$$

3. Demuestra que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

## Segundo reto Pi 2022

Puedes imaginar un nudo matemático *anudando* un cordón de los zapatos y pegando después sus extremos entre sí. Un nudo puede representarse mediante diagramas planos. Puedes ver dos de estos diagramas en la siguiente figura:

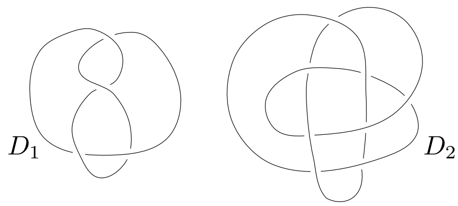


Figura 1: Diagramas de nudos $D_1$ y $D_2$

A partir de un diagrama $D$ de un nudo podemos construir una superficie $S(D)$ de la siguiente manera: por cada cruce en el diagrama colocamos un pequeño cuadrado, y por cada arista del diagrama añadimos un rectángulo conectando los cuadrados que corresponden a los cruces extremos de la arista, según indica el dibujo.

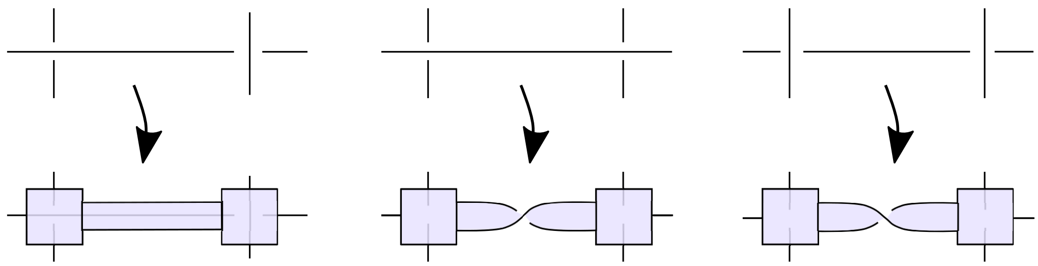

Figura 2: Trozos de superficie correspondientes a aristas alternante (izquierda) y no alternantes (central y derecha)

Es importante darse cuenta de que hemos *twistado* el rectángulo cuando éste se corresponde con una arista no alternante. Y es importante observar hacia qué lado hemos realizamos el *twist*. Por ejemplo, aquí puedes ver un diagrama (con aristas alternantes y no alternantes) y su superficie correspondiente:

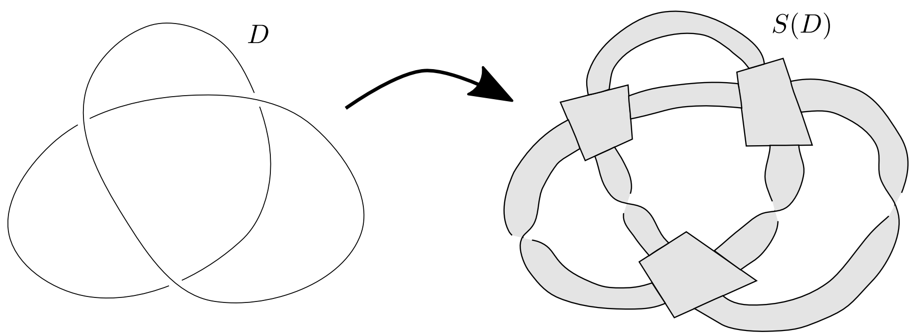


Figura 3: Un ejemplo de diagrama $D$ (con seis aristas) y la superficie correspondiente $S(D)$

En primer lugar veamos si tus clases de dibujo artístico merecieron la pena:

1. Dibuja las superficies $S(D)$ que se corresponden con los diagramas de la Figura 1.
2. Comprueba que dichas superficies son orientables, es decir, cada una de ellas tiene dos lados (digamos un anverso y un reverso). Para ello puedes colorear cada lado con un color diferente (si por un momento piensas que cualquier superficie es orientable, puedes mirar en la wikipedia lo que le ocurre a nuestra querida banda de Moebius).

Ahora se trata de razonar sobre este tipo de superficies $S(D)$ en general. A ver qué tal se nos da:

3. Demuestra que, no importa de qué diagrama $D$ partas, la superficie $S(D)$ construida será siempre orientable.
4. La frontera o borde de la superficie $S(D)$ está formada por $N$ curvas cerradas simples (por ejemplo, $N = 3$ para la superficie $S(D)$ de la Figura 3). ¿Qué relación hay entre este número $N$ y el número $c$ de cruces del diagrama $D$, *cuando el diagrama $D$ es alternante*? Que el diagrama del nudo sea alternante significa que todas sus aristas son alternantes; con otras palabras, el diagrama puede recorrerse alternando el paso por encima/por debajo.