Atrévete con PI
Tercer concurso de problemas matemáticos
Celebración del Día Internacional de las Matemáticas
14 de marzo de 2020
ETSIDI-UPM

El pasado 26 de noviembre de 2019 la UNESCO declaró Día Internacional de las Matemáticas el día 14 de marzo (tradicionalmente el día de PI, por el formato anglosajón de fechas 03/14/año). Para celebrarlo por todo lo alto en la UPM, desde la ETSIDI proponemos un concurso de problemas matemáticos.

Bases del concurso

(a) Podrá participar cualquier alumno de grado o máster matriculado en la UPM durante el curso actual.

(b) Se valorará la originalidad en el enfoque de cada problema (aunque no tengan una solución completa) y la claridad en la presentación.

(c) Las soluciones deben enviarse, **antes de las 14:03 horas del jueves 5 de marzo**, a cualquiera de las siguientes direcciones de correo electrónico:

carmen.garciamiguel@upm.es

pedro.gmanchon@upm.es

(d) El formato de la solución será necesariamente un único documento PDF. En la cabecera deberá figurar la siguiente información:

- Nombre y apellidos.
- Grado/Máster y Escuela.
- Dirección de correo electrónico.
- Un número de teléfono (opcional).

(e) La entrega de premios (por determinar) tendrá lugar el miércoles 11 de marzo, en el Salón de Actos de la ETSIDI (Ronda de Valencia, 3).

Problemas preparados por Carmen García-Miguel Fernández y Pedro M. González Manchón

Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial

Escuela Técnica Superior de Ingeniería y Diseño Industrial (ETSIDI)

Pasa la hoja... y ¡comienza a pensar!

Reto 1

El número irracional π está presente en muchos ámbitos de la ingeniería y la ciencia en general. Casi tan fascinante como π es el también irracional NÚMERO ÁUREO

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803\ldots$$

también denominado razón áurea o *divina proporción*. Para entender la razón de este último nombre, imagina que partes un segmento en dos de longitudes a y b, de forma que la longitud del segmento original dividida entre la del segmento mayor, coincida con la del segmento mayor entre la del menor; entonces dicha proporción es el número áureo, es decir,

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi.$$

Ambos números, π y φ, están relacionados de múltiples formas. Te retamos a que pruebes lo siguiente:

(a) Demuestra que φ es el radio de la circunferencia que circunscribe a un decágono regular de lado unidad.

(b) Demuestra que

$$\frac{\varphi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Reto 2

¿Sabías que un balón de fútbol se fabrica utilizando exactamente 12 pentágonos y 20 hexágonos? El balón constituye un ejemplo de lo que se denomina *fullereno*. Un fullereno es un poliedro de grado tres construido exclusivamente con pentágonos y hexágonos (que sea de grado tres significa que en cada vértice concurren exactamente tres polígonos). El nombre hace honor al arquitecto Richard B. Fuller, quien diseñó un pabellón esférico con dicha estructura en la Exposición Universal de Montreal de 1967.

(a) Demuestra lo siguiente: si fabricamos un balón usando cualquier tipo de polígonos, incluso permitiendo que en cualquier vértice puedan concurrir más de tres polígonos, se verifica que $V - A + C = 2$ donde V es el número de vértices, A es el número de aristas y C es el número de caras.

(b) Utiliza la información del apartado anterior (no importa que no hayas conseguido probarlo) para demostrar que, si fabricamos un balón solo con pentágonos y hexágonos y teniendo el poliedro grado tres, se necesitan exactamente 12 pentágonos.

(c) ¿Son necesarios 20 hexágonos? Si la respuesta es negativa, muestra un ejemplo.

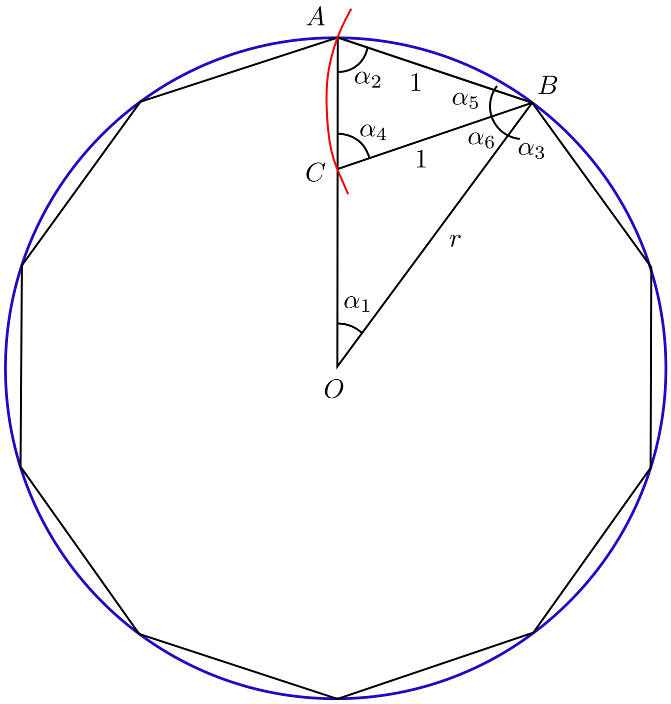
(d) ¿Hay algún fullereno con al menos un pentágono y un hexágono que tenga la forma de un toro (un toro es una superficie con la forma de un flotador o un *donuts*)?

Solución al reto 1

(a) En la siguiente figura se ha dibujado un decágono regular de lado unidad inscrito en una circunferencia de radio r (por el momento desconocido). Observa que el triángulo AOB es isósceles, siendo

$$\alpha_1 = 360/10 = 36 \text{ grados.}$$

Con un compás pinchado en B podemos dibujar un arco de circunferencia (en rojo) de radio uno para determinar el punto C. Resulta claro que que el triángulo ABC es también isósceles.



Los ángulos están numerados según van deduciéndose:
$\alpha_1 = 360/10 = 36$
$\alpha_2 = \alpha_3 = (180 - 36)/2 = 72$
$\alpha_4 = \alpha_2 = 72$ (porque ABC es isósceles)
$\alpha_5 = 180 - (\alpha_2 + \alpha_4) = 36$
$\alpha_6 = \alpha_3 - \alpha_5 = 36$

Ya que $\alpha_1 = \alpha_6$, el triángulo OCB también es isósceles, y por tanto $AC = r - OC = r - BC = r - 1$. La clave ahora es el hecho de que los triángulos AOB y ABC son semejantes, pues ambos son isósceles y en ambos triángulos el ángulo que se repite es el mismo, a saber, 72 grados. Por esta razón

$$\frac{OA}{BA} = \frac{AB}{AC}$$

y por tanto

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{r-1}.$$

En consecuencia

$$r(r-1) = 1.$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado nos da que

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

(b) Aplicando el teorema del coseno al triángulo COB, se tiene que

$$CB^2 = OC^2 + OB^2 - 2\, OC \cdot OB \cos(\alpha_1),$$

es decir

$$1^2 = 1^2 + r^2 - 2 \cdot 1 \cdot r \cdot \cos(\alpha_1).$$

Ya que $\alpha_1 = 36$ grados, o sea $\pi/5$ radianes,

$$0 = r^2 - 2r\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

de donde

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{r}{2} = \frac{\varphi}{2}.$$

Solución al reto 2

(a) Recorta con tijeras la cara de uno de los polígonos del balón, dejando las aristas de su borde intactas. A continuación introduce las palmas de las manos en el balón dejando por fuera los dedos índices, y despliega el balón (dándole de sí lo que haga falta pero sin romperlo) hasta dejarlo plano sobre una mesa. De esta manera los vértices y las aristas que configuraban los polígonos en el balón dibujan ahora, sobre el plano (de la mesa), un grafo (donde no hay dos aristas que se corten entre sí), y cada cara (interior de un polígono) en el balón dibuja exactamente una región delimitada por el grafo. La cara recortada puede imaginarse como la región no acotada limitada por las aristas más exteriores del grafo. En resumen, vemos cómo un poliedro esférico puede visualizarse mediante un grafo plano: los vértices en el poliedro se corresponden con los vértices en el grafo y lo mismo ocurre con las aristas; en cuanto a las caras del poliedro, éstas se corresponden con las regiones que determina el grafo.

Así pues, la cuenta $V - A + C$ en el poliedro es la misma que la cuenta $V - A + R$ en el grafo donde R es el número de regiones determinadas por el grafo. Veamos que esta cuenta siempre da 2 utilizando un argumento de inducción. En el caso más sencillo el grafo es un triángulo, con $V = 3$, $A = 3$ y $R = 2$, una región interior y la región exterior no acotada. Esto hace $V - A + R = 3 - 3 + 2 = 2$. Ahora imagina que ya hemos logrado demostrar que $V - A + R = 2$ en el caso en que nuestro grafo tenga cierto número k de aristas; procedamos a demostralo si hay $k + 1$. Para ello basta elegir cualquier arista y darse cuenta de que, si la eliminamos, ¡desaparece también una región, pero ningún vértice! Así que la cuenta $V - A + R$ sigue dando lo mismo, o sea, 2.

Lo que hemos demostrado es que la característica de Euler de la esfera es 2. Ahora puedes cotillear en Internet mucho más acerca de este número; si tienes más tiempo, puedes incluso leer el precioso libro de **Imre Lakatos** titulado *Pruebas y refutaciones*, en donde toda una clase guiada por su profesor, a través de un diálogo perspicaz y a ratos divertido, se *dispone* a demostrar que $V - A + C = 2$ para cualquier poliedro. Pero claro, ¡no todos los poliedros son esféricos!

(b) Sean p y h los números de pentágonos y hexágonos usados para fabricar nuestro balón. Entonces

$$V = \frac{5p + 6h}{3}, \quad A = \frac{5p + 6h}{2}, \quad C = p + h$$

puesto que, en cada vértice concurren exactamente tres polígonos (al tratarse de un fullereno) y cada arista lo es exactamente de dos polígonos. Dado que debe ser $V - A + C = 2$, tenemos

$$\frac{5p + 6h}{3} - \frac{5p + 6h}{2} + (p + h) = 2,$$

es decir $p = 12$. En efecto, la ecuación anterior es muy engañosa: parece que contiene dos variables, ¡pero no es así! (suma las fracciones y lo comprobarás).

(c) La misma ecuación no pone en cambio ninguna restricción sobre el número de hexágonos. Eso puede querer decir que hay diferentes posibilidades para dicho número, pero tal vez haya otras restricciones sobre dicho número por razones diferentes. ¿O no? Yo en tu lugar le preguntaría al dodecaedro...

(d) Ajá, ahora tenemos un poliedro con la forma de un toro. En este caso la característica de Euler es $V - A + C = 0$ y una cuenta similar a la del apartado 2 nos obliga a poner $P = 0$. Por lo tanto no hay ningún fullereno con la forma de un toro que tenga al menos un pentágono.

Un toro se puede construir, por ejemplo, usando pentágonos, hexágonos y heptágonos. La zona exterior, con una curvatura positiva como la esfera, está hecha de pentágonos y hexágonos, al igual que el balón de fútbol. En cambio la zona interior, de curvatura negativa, requiere necesariamente de heptágonos. ¡Pero esto ya es otra historia!