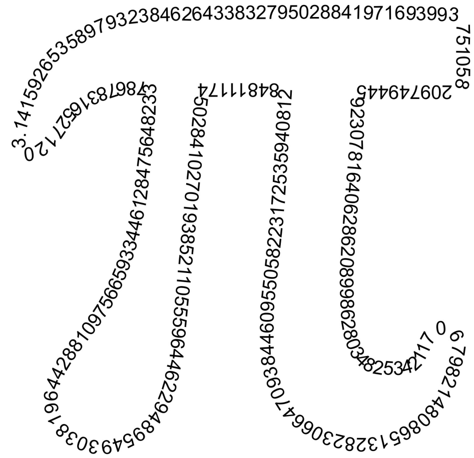
PI 2018
Soluciones

Atrévete con



¿Recuerdas el desafío del día de PI?

Hasta 22 participantes presentaron sus soluciones al desafío de PI.

¡Muchas gracias a todos ellos por su participación!

Examinadas todas las presentaciones, el premio a la mejor aportación ha sido finalmente para...

Elena Iglesia Escarpizo-Lorenzana (Mecánica/Diseño, cuarto curso)

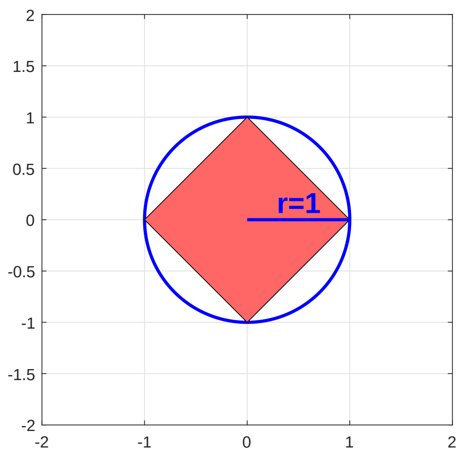
Nos gustaría también mencionar especialmente los trabajos de los siguientes participantes:
- Ángel del Pozo Manglano (Diseño, segundo curso).
- Carlos Alberto Vera Romero (Laboratorio de Alta Tensión, Depto. de Ingeniería Eléctrica).
- Manuel Lorenzo Novo (Diseño, cuarto curso).
- Mihai Florin Ricean (Mecánica, tercer curso).

La respuestas entregadas tienen en general una calidad excepcional. Casi todas responden correctamente al primer problema planteado, y muchas adivinan la respuesta del segundo aportando al menos algún tipo de argumento experimental. La ganadora ha logrado de hecho dar la clave del segundo problema. Hay además respuestas con un tono divertido, y otras que tienen una presentación excepcional. ¡Gracias a tod@s!

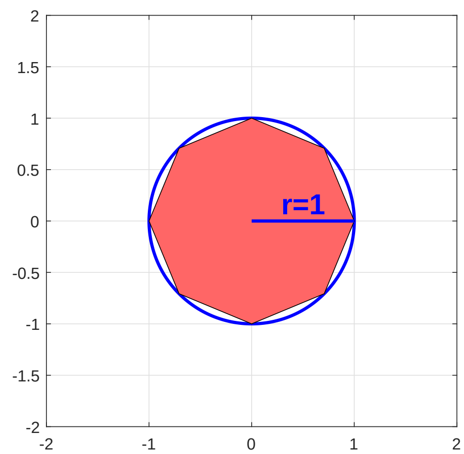
Vamos ahora a recordar cuál era el problema y discutir algunas soluciones.

Problema

Tal vez la forma más sencilla de pensar en π sea verlo como el área del círculo de radio 1. Podemos aproximar dicho área (y por tanto el valor de π) mediante el cálculo de las áreas encerradas por polígonos regulares inscritos en la circunferencia.



Iteración $i = 1$. Número de lados $n = 4$.



Iteración $i = 2$. Número de lados $n = 8$.

Se plantean dos cuestiones:

1. Siguiendo el esquema que sugieren las figuras anteriores, ¿cuántas iteraciones necesitas para obtener el primer decimal de π? ¿Y para los dos primeros?

2. Supón que deseas encontrar al menos k decimales exactos de π, siguiendo el esquema anterior. ¿Cuál es el menor número de iteraciones i que debes hacer? ¿Podrías al menos justificar alguna relación entre k e i, aunque no sea la óptima?

Primera cuestión. Soluciones y discusión

La iteración i usa $n_i = 2^{i+1}$ lados de longitud l_i. Puede obtenerse el área A_i encerrado por el polígono correspondiente mediante la fórmula

$$A_i = \frac{a_i p_i}{2}$$

donde $p_i = n_i l_i$ es el perímetro del polígono y a_i es el valor de su apotema.

No te dejes asustar por tanto subíndice i, que sólo tiene el papel de recordarte que estás trabajando con el polígono construido en la iteración iésima.

Iteración i

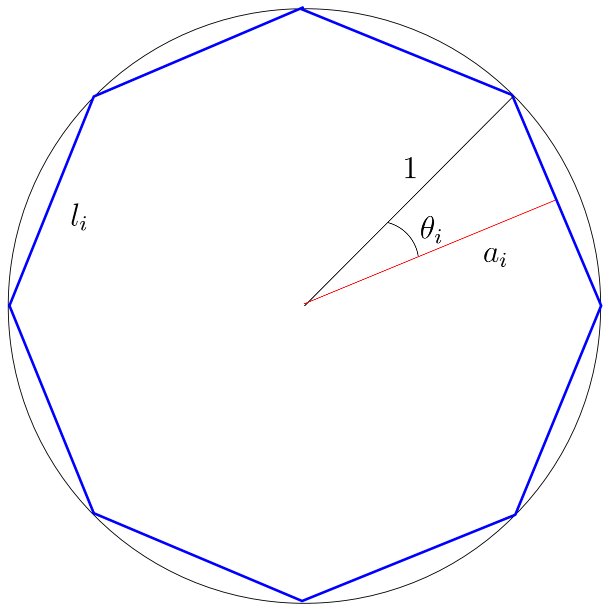
Número de lados $n_i = 2^{i+1}$

Longitud del lado $l_i = 2\,\mathrm{sen}(\theta_i)$

Perímetro $p_i = n_i l_i = 2 n_i\,\mathrm{sen}(\theta_i)$

Apotema $a_i = \cos\theta$

Ángulo $\theta_i = \dfrac{360}{2n_i} = \dfrac{180}{n_i}$



Ahora, utilizando la fórmula del seno del ángulo doble, se deduce que

$$A_i = \frac{a_i p_i}{2} = \frac{2n_i\,\mathrm{sen}(\theta_i)\cos(\theta_i)}{2} = \frac{n_i}{2}\,\mathrm{sen}(2\theta_i) = 2^i\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{2^i}\right).$$

Así que la aproximación de π tras la iteración i es $\boxed{A_i = 2^i\,\mathrm{sen}\left(\frac{180}{2^i}\right)}$.

Escrito en función del número de lados, dado que $n_i = 2^{i+1}$, queda $\boxed{A(n) = \frac{n}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{360}{n}\right)}$.

Aplicando la primera fórmula se llega a

- la primera cifra decimal tras cuatro iteraciones,
- y a la segunda tras seis iteraciones.

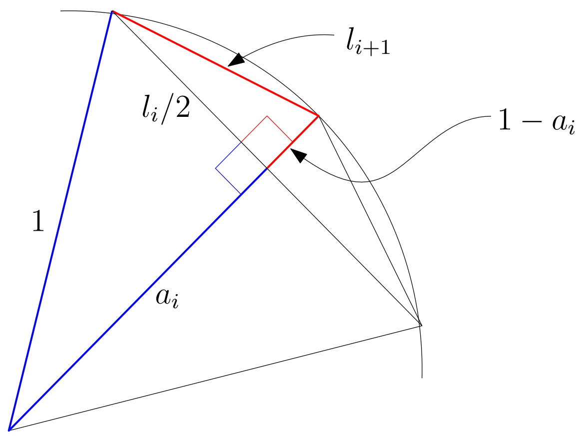
La mayoría de las respuestas ha llegado a alguna de las fórmulas recuadradas y deducido las conclusiones. ¡Enhorabuena! Aunque algunos (me incluyo) no recordaban la fórmula del área encerrada por un polígono regular, la han deducido implícitamente, viendo este área como la suma de n triángulos isósceles iguales.

Hay en cambio algunas reflexiones interesantes, que nos recuerdan que no es oro todo lo que reluce.

En primer lugar, en la fórmula anterior parece que todos estamos de acuerdo en que podemos obtener cuantas cifras decimales deseemos al hallar el seno de un ángulo. No sé que pensaría Pitágoras de esto... Podemos tratar de salvar el pellejo recurriendo a otra fórmula que involucra raíces cuadradas en vez del seno. A priori es posible obtener tantas cifras decimales exactas de dicha raíz sin ningún tipo de matemáticas profundas, cosa que no parece tan evidente en el caso del seno de un ángulo. La idea es obtener las aproximaciones A_i mediante la fórmula

$$\boxed{A_{i+1} = 2^i l_i}$$

y utilizar recursivamente que $l_{i+1} = \sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-(l_i/2)^2}}$ empezando con $l_1 = \sqrt{2}$.



En efecto, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo azul,

$$a_i = \sqrt{1-(l_i/2)^2},$$

y aplicándolo al triángulo rojo,

$$l_{i+1} = \sqrt{(1-a_i)^2 + (l_i/2)^2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-(l_i/2)^2}\right)^2 + (l_i/2)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-(l_i/2)^2}}.$$

Y una cuentilla en la que tooooodo se acaba simplificando da la fórmula recuadrada:

$$\begin{aligned}
A_{i+1} &= \frac{a_{i+1}p_{i+1}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{1-(l_{i+1}/2)^2}\,2^{i+2}\,\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-(l_i/2)^2}}}{2} \\
&= \vdots \quad \text{(¡A ver esas cuentas! Pista: cambia primero } l_{i+1} \text{ por su valor en función de } l_i.\text{)} \\
&= 2^i l_i.
\end{aligned}$$

En segundo lugar, estamos afirmando que tras cuatro iteraciones se llega a la primera cifra decimal de π, asumiendo que conocemos de antemano dicha cifra. La cosa parece más complicada sin asumir dicho conocimiento, que sería realmente la situación en la que se encontraría Tatakarapopoulis. La respuesta a la segunda cuestión resolverá implícitamente esta pega.

Segunda cuestión. Soluciones y discusión

Para empezar, una reflexión: *Es posible aproximar una cantidad tanto como se desee sin acertar ni un sólo dígito (sea decimal o no).* Por ejemplo, imagina que mides una varilla de longitud l mediante un procedimiento que garantiza un error inferior a un milímetro, y obtienes el valor 0.3995 metros. De lo que estarás seguro es de que la longitud de la varilla cumple que $0.3985 < l < 0.4005$. La longitud exacta de la varilla podría ser $l = 0.400$ metros que no tiene ni siquiera un sólo decimal en común con la fantástica aproximación original 0.3995. Claro está, esto ocurre cuando la cifra decimal correspondiente es 1 ó 9. Y ahora ¡vayamos al grano!

Llamemos d_i a la diferencia entre el área del círculo unidad (o sea, el valor de π) y el área A_i encerrado por el polígono obtenido tras la iteración i. Con otras palabras, d_i es el error cometido al conformamos con la aproximación dada por la iteración i (no necesitamos el valor absoluto pues el polígono está inscrito en la circunferencia):

$$d_i = \pi - A_i.$$

La clave está en darse cuenta (después vemos cómo) de que

$$\boxed{d_{i+1} < \frac{1}{2}d_i} \tag{1}$$

Con otras palabras, el error cometido tras cualquier iteración es menor que la mitad del error cometido en la iteración anterior. En consecuencia, tras cada cuatro nuevas iteraciones el error es al menos diez veces menor, es decir,

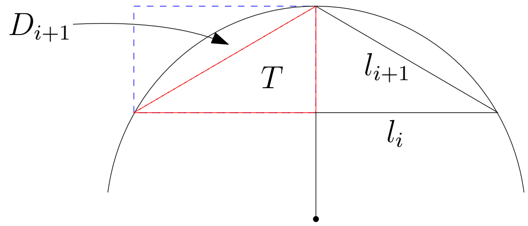
$$d_{i+4} < \frac{1}{10}d_i.$$

puesto que

$$d_{i+4} \; < \; \left(\frac{1}{2}\right)^4 d_i \; < \; \frac{1}{10}d_i.$$

Esto significa que, si tras una iteración el error es menor que (pongamos) una centésima de unidad de área 0.01, entonces tras cuatro iteraciones más el error será inferior a una milésima, determinando así los tres primeros decimales (salvando la precaución implícita en la reflexión inicial). Más en general, para determinar los primeros k decimales bastan $4k$ iteraciones, es decir, cuatro iteraciones por cada cifra decimal.

En la siguiente página, demostraremos la fórmula (1).



Probemos la fórmula (1). Nótese que $d_i = 2^{i+1}D_i$ donde D_i es el área entre el círculo y un lado de la iteración i. En la figura se indica el área D_{i+1} e igualmente $d_{i+1} = 2^{i+2}D_{i+1}$.

Sea T el área encerrada por el triángulo rojo del dibujo. Ya que T ocupa la mitad del rectángulo azul y el área indicado por D_{i+1} está contenido en la otra mitad, resulta obvio que $D_{i+1} \leq T$. Igualmente obvia es la igualdad $T + D_{i+1} = \frac{1}{2}D_i$. Luego

$$2D_{i+1} = D_{i+1} + D_{i+1} \leq D_{i+1} + T = \frac{1}{2}D_i$$

y por tanto

$$2d_{i+1} = 2 \cdot 2^{i+2}D_{i+1} \leq 2^{i+2}\frac{1}{2}D_i = 2^{i+1}D_i = d_i.$$

Es decir, $2d_{i+1} \leq d_i$ lo que concluye la demostración de la fórmula (1).

No obstante, varias respuestas presentadas al concurso coinciden en señalar que bastan $2k$ iteraciones para obtener k decimales exactos, o sea dos iteraciones por decimal (la respuesta ganadora es la única que además da la clave del porqué). Para demostrarlo bastaría ver por ejemplo que

$$d_{i+1} < \frac{1}{3.2}d_i \tag{2}$$

porque en tal caso tendríamos (como antes)

$$d_{i+2} < \left(\frac{1}{3.2}\right)^2 d_i < \frac{1}{10}d_i.$$

La fórmula (2) resulta plausible a la vista del siguiente dibujo, aunque esta demostración no parece tan simple (ni gráfica) como la de la fórmula (1). Observa que bastaría probar que 1.2 veces el área roja es menor que el área azul, vamos, el reto *pepsi*. Pero esa es otra historia...