

# TEMARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

## PRIMERA PARTE

### 1 Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.); orden de una E.D.O.; E.D.O. escritas en forma normal; solución de una E.D.O.; solución general; solución particular; solución singular. Ejemplos y aplicaciones; modelos matemáticos bien planteados.

Algunos métodos elementales de resolución de E.D.O. Ecuaciones diferenciales exactas. Función potencial y solución general. Factores integrantes. Ejemplos y aplicaciones.

Ecuaciones de variables separables. Algunos ejemplos de ecuaciones reducibles a variables separables. Ejemplos y aplicaciones.

Ecuaciones lineales de primer orden. Problema de valor inicial o de Cauchy: existencia y unicidad de solución. Estructura del conjunto de soluciones. Ecuación lineal no homogénea. Ecuaciones de Bernoulli y de Ricatti. Ejemplos y aplicaciones.

Existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy para E.D.O., sistemas diferenciales de primer orden y E.D.O. de orden  $n$ . Prolongación de soluciones.

### 2 Sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes

El problema de Cauchy para sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes. Ecuación característica. Sistemas diferenciales diagonalizables en  $\mathbf{R}$ .

Sistemas diferenciales diagonalizables en  $\mathbf{C}$ . Estructura de la solución general.

Norma de una matriz. Exponencial de una matriz. Propiedades y métodos de cálculo. Solución del problema de Cauchy para sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes.

El problema de Cauchy para sistemas diferenciales lineales no homogéneos. Fórmula de variación de las constantes.

Sistemas lineales de ecuaciones en diferencias finitas con coeficientes constantes. Casos diagonalizables en  $\mathbf{R}$  y en  $\mathbf{C}$ .

### 3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden $n$ con coeficientes constantes

El problema de Cauchy para una E.D.O. lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes. El sistema diferencial equivalente.

La ecuación característica. Localización del caso de sistema diferencial equivalente diagonalizable en  $\mathbb{R}$ . Solución en el caso diagonalizable en  $\mathbb{C}$ .

Estructura del conjunto de soluciones de la E.D.O.

Ecuación diferencial lineal de orden  $n$  con coeficientes constantes y no homogénea. Estructura del conjunto de soluciones. Búsqueda de soluciones particulares: método de los coeficientes indeterminados y método de variación de las constantes.

Ecuaciones en diferencias finitas lineales de orden  $n$  y coeficientes constantes. Ecuación característica. Estructura del conjunto de soluciones. Ecuaciones en diferencias finitas lineales de orden  $n$  no homogéneas.

## 4 Clasificación de los sistemas diferenciales lineales en el plano

Introducción a los sistemas dinámicos. Ejemplos sencillos de casos lineales en dimensión uno y dos: campo vectorial asociado; órbitas y soluciones de equilibrio; espacio de fases y espacio de fases ampliado.

Clasificación de los sistemas dinámicos lineales planos con coeficientes constantes. Representación gráfica del espacio de fases en los casos genéricos y no genéricos. Nodos, puertos, focos y centros, nociones de estabilidad.

## 5 Sistemas y ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables

Existencia y unicidad de solución global.

Estructura del espacio de soluciones. Dependencia e independencia lineal de conjuntos de funciones. El wronskiano. Sistema fundamental de soluciones. Teorema de Liouville.

Matriz fundamental de un sistema diferencial lineal.

Reducción del orden.

El caso no homogéneo. Fórmula de variación de las constantes.

La ecuación diferencial lineal de orden  $n$  con coeficientes variables. Sistema diferencial equivalente. Caso no homogéneo.

Ejemplos y aplicaciones.

## 6 Aplicaciones: Modelos lineales en Física

Vibraciones de una masa pendiente de un muelle. Movimientos amortiguado y no amortiguado. Movimiento forzado. Fenómenos de resonancia.

Péndulo simple. Osciladores acoplados.

Circuitos eléctricos RLC.

Aplicaciones de los sistemas dinámicos discretos lineales. Ejemplos de procesos de Markov.

## 7 Sistemas diferenciales no lineales. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Sistemas dinámicos no lineales autónomos y no autónomos. Campo vectorial asociado a un sistema diferencial. Orbitas y puntos de equilibrio. Orbitas cerradas y soluciones periódicas. Espacio de fases y espacio de fases ampliado.

Integrales primeras.

Puntos de equilibrio estables, asintóticamente estables e inestables.

Determinación de la estabilidad de un punto de equilibrio por linealización. Puntos de equilibrio hiperbólicos.

Método directo de Liapunov. Funciones de Liapunov.

Sistemas dinámicos discretos. Puntos de equilibrio y estabilidad. Ejemplos y aplicaciones.

## 8 Soluciones periódicas

Orbitas cerradas y ciclos límite. Existencia de soluciones periódicas en sistemas diferenciales planos. Teoremas de Poincaré, Bendixson y Poincaré-Bendixson. Algunos ejemplos: modelo predador-presa de Lotka-Volterra; especies en competición.

Sistemas gradiente. Sistemas mecánicos conservativos. Teorema de conservación de la energía.

Soluciones periódicas en sistemas dinámicos discretos. Un ejemplo de caos.

Introducción a los sistemas diferenciales dependientes de un parámetro. Bifurcación. Ejemplos y aplicaciones.

## BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

Las siguientes notas, que están a disposición de los alumnos en el Departamento de Publicaciones de esta Escuela, se han confeccionado como ayuda y orientación para el estudio de la asignatura. Contienen problemas resueltos e indicaciones teóricas.

**E. Sánchez, J. González y J. Gutiérrez.**— *Sistemas Dinámicos.*— *Una introducción a través de ejercicios.* E.T.S.I.Industriales de la U.P.M.— Servicio de Publicaciones. (1999).

No existe ningún libro en castellano y de fácil acceso a los estudiantes que se adecúe completamente al contenido y orientación de la asignatura. Recomendamos los siguientes libros como buenas referencias, con amplio contenido de temas y exposición clara.

**M. Braun.**— *Ecuaciones Diferenciales y sus Aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica. (1990).

**W. Derrick and S. Grossman.**— *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. (1984).

**R. Nagle and E. Saff.**— *Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales.* Addison-Wesley Iberoamericana. (1992).

**S. Ross.**— *Ecuaciones Diferenciales.* Reverté. (1979).

# TEMARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

## SEGUNDA PARTE

### 1 Transformada de Laplace

Definición, funciones de tipo exponencial, abscisa de convergencia.- Ejemplos.

Propiedades: linealidad, semejanza, traslación, comportamiento en el infinito.

Inyectividad de la transformada de Laplace.

Transformada de Laplace de un producto de convolución.

Aplicaciones de la transformada de Laplace: resolución de problemas de valor inicial para E.D.O. lineales y sistemas diferenciales lineales. Impulsión: delta de Dirac, función de Heaviside.

### 2 Series de Fourier y Transformada de Fourier

Sistemas de funciones ortogonales y ortonormales. Serie de Fourier de una función con respecto a un sistema ortonormal. Coeficientes de Fourier. Aproximación en media cuadrática. Desigualdad de Bessel. Identidad de Parseval. Sistemas ortonormales completos.

Series trigonométricas de Fourier. Convergencia puntual y uniforme. Teorema de Dini. Lema de Riemann-Lebesgue.

Transformada de Fourier de una función absolutamente integrable en  $\mathbf{R}$ . Propiedades y ejemplos: transformada de Fourier de  $\exp(-x^2/2)$ . El espacio  $\mathcal{S}$  de las funciones rápidamente decrecientes en el infinito.

Derivación de la transformada de Fourier.

Fórmula de inversión.

Producto de convolución y transformada de Fourier. Fórmula de Parseval-Plancherel. La transformada de Fourier es una isometría en  $\mathcal{S}$ .

### 3 E.D.P. de primer orden cuasilineales

Definición de E.D.P. cuasilineal de primer orden y dos variables independientes. Problema de valores iniciales.

Curvas características. Superficie integral. Sistema diferencial asociado. Existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy.

Ejemplos: leyes de conservación. La ecuación de continuidad en Mecánica de Fluidos.

## 4 Introducción a las E.D.P. lineales de segundo orden

E.D.P. lineales y cuasilineales de segundo orden y dos variables independientes. Ejemplos: las ecuaciones de la Física Matemática: ecuación de ondas, de Laplace y del calor.

El problema de Cauchy para una E.D.P. de segundo orden cuasilineal y dos variables independientes. Curvas características. Propagación de singularidades.

Clasificación de las E.D.P. lineales de segundo orden y dos variables independientes: E.D.P. hiperbólicas, parabólicas y elípticas.

## 5 El método de separación de variables

Aplicación del método de separación de variables y obtención de la solución formal en algunos ejemplos: problema de la cuerda vibrante; problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cuadrado y en un círculo; ecuación del calor.

Conjuntos de autofunciones para ciertas E.D.O. de segundo orden que aparecen en la aplicación del método de separación de variables. Ecuaciones de Bessel, Legendre y Hermite. Nociones sobre la completitud de conjuntos de autofunciones. Teorema de Sturm-Liouville.

## 6 La ecuación de ondas unidimensional

La ecuación de la cuerda vibrante. Ecuación de ondas unidimensional. Cuerda finita con extremos fijos. Cuerda infinita.

Solución de D'Alembert para el problema de valores iniciales en la ecuación de ondas (cuerda infinita). Características. Dominio de dependencia y de influencia de la solución en un punto.

Solución del problema mixto de valores iniciales y de contorno (cuerda finita). Caso no homogéneo (existencia de fuerzas externas).

Unicidad de solución. Integrales de la energía.

## 7 Funciones de Green

Nociones sobre la formulación de las E.D.P. en el sentido de las distribuciones: soluciones fundamentales.

Obtención de la solución fundamental para la ecuación de Laplace.

Función de Green para el problema de Dirichlet en un dominio.

## 8 La ecuación del calor

Obtención de solución formal del problema de valores iniciales para la ecuación del calor por medio de la transformada de Fourier.

Aplicación de la transformada de Fourier a la resolución de algunos problemas de E.D.P.

## 9 Introducción al Cálculo de Variaciones

Funcionales en espacios normados. Funcionales lineales y continuos. Ejemplo: la longitud del arco.

Extremo relativo de un funcional.

Variación primera de un funcional en un punto. Condición necesaria de extremo de un funcional. Puntos estacionarios.

Funcionales de la forma

$$F(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad ; \quad F(y) = \int_a^b f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx$$

Ecuación de Euler.

Funcionales de la forma

$$F(u) = \iint_D f(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$$

Ejemplos y aplicaciones.

### BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

La bibliografía recomendada para la primera parte de la asignatura puede servir para cubrir parcialmente el temario de esta segunda parte.

Referencias específicas de E.D.P., buenos libros de consulta para estudiantes son:

**Peral Alonso, I.**— *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Addison-Wesley / Univ. Auton. Madrid. (1995).

**Weinberger, H.F.**— *Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales con Métodos de Variable Compleja y de Transformaciones Integrales*. Reverté. (1979).