

## PROGRAMA DE CALCULO INFINITESIMAL

### Lección 1 : CONJUNTOS Y NUMEROS NATURALES.

- §1 Introducción, 1
- §2 Pertenencia e igualdad, 1
- §3 Algebra de proposiciones, 2
- §4 Cuantificadores, 4
- §5 Algebra de conjuntos, 4
- §6 Subconjuntos, 5
- §7 Números naturales, 6
- §8 Principios de inducción, 8
- §9 Sistemas de numeración, 13

### Lección 2 : ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS Y NUMEROS.

- §1 Introducción, 17
- §2 Noción de Anillo, 18
- §3 El anillo  $\mathbf{Z}$ , 21
- §4 Noción de cuerpo, 22
- §5 Noción de espacio vectorial, 23
- §6 El cuerpo ordenado  $\mathbf{Q}$ , 24
- §7 Representación geométrica de  $\mathbf{Q}$ , 26

### Lección 3 : LA RECTA REAL.

- §1 Introducción, 31
- §2 Noción de cortadura, 33
- §3 El cuerpo  $\mathbf{R}$ , 34
- §4 Existencia de ínfimo, 36
- §5 Propiedad arquimediana, 36
- §6 Valor absoluto, 38
- §7 Intervalos, 41

### Lección 4 : FUNCIONES Y GRAFICAS.

- §1 Introducción, 45
- §2 Relaciones, 46
- §3 Aplicaciones, 49
- §4 Funciones, 52
- §5 Algebra de funciones, 57
- §6 Simetrías, 59

### Lección 5 : SUCESIONES.

- §1 Introducción, 63
- §2 Sucesión diferencia, 64
- §3 Serie de una sucesión, 66
- §4 Diferencias sucesivas, 68

- §5 Progresiones aritméticas de orden superior, 70
- §6 Ecuaciones en diferencias, 72

Lección 6 : LIMITES DE SUCESSIONES.

- §1 Introducción, 79
- §2 Noción de convergencia, 81
- §3 Propiedades de una sucesión convergente, 84
- §4 Algebra de las sucesiones convergentes, 85

Lección 7 : COMPLETITUD DE  $\mathbf{R}$ .

- §1 Introducción, 91
- §2 Sucesiones monótonas, 91
- §3 Completitud de  $\mathbf{R}$ , 96
- §4 Límites infinitos, 98
- §5 Recta real extendida, 99

Lección 8 : CONTINUIDAD EN UN PUNTO.

- §1 Introducción, 103
- §2 Noción de continuidad, 104
- §3 Propiedades locales, 107
- §4 Algebra de funciones continuas, 109
- §5 Composición de funciones continuas, 110
- §6 Convergencia y continuidad, 111

Lección 9 : CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

- §1 Introducción, 115
- §2 Teorema de los valores intermedios, 116
- §3 El método de la bisección, 119
- §4 Extremos globales, 121
- §5 Imagen de un intervalo por una función continua, 123
- §6 Funciones continuas inyectivas, 124
- §7 Continuidad de la inversa, 126

Lección 10 : LIMITES DE FUNCIONES.

- §1 Introducción, 131
- §2 Noción de límite, 132
- §3 Límites, convergencia y continuidad, 134
- §4 Discontinuidades de una función, 136
- §5 Propiedades locales, 138
- §6 Algebra de límites, 139
- §7 Límites infinitos, 140

Lección 11 : LA DERIVADA.

- §1 Introducción, 145

- §2 Concepto de derivada, 147
- §3 Interpretación geométrica de la derivada, 150
- §4 Diferenciabilidad de las funciones derivables, 153
- §5 El método de Newton, 158
- §6 Derivadas laterales, 159
- §7 Derivación sucesiva, 161

#### Lección 12 : REGLAS DE DERIVACION,

- §1 Introducción, 165
- §2 Algebra de derivadas, 165
- §3 Derivación de un determinante, 169
- §4 La regla de la cadena, 170
- §5 Derivabilidad de la función inversa, 173
- §6 La fórmula de Leibniz, 175

#### Lección 13 : EL TEOREMA DE ROLLE.

- §1 Introducción, 181
- §2 Extremos locales de funciones derivables, 181
- §3 Algunas aplicaciones del cálculo de extremos, 186
- §4 Ceros de polinomios, 189
- §5 El teorema de Rolle, 193
- §6 Separación de las raíces de una ecuación, 195
- §7 Aplicación del teorema de Rolle a la interpolación polinomial, 196

#### Lección 14 : EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO.

- §1 Introducción, 201
- §2 El teorema del valor medio, 202
- §3 La fórmula de los incrementos finitos, 205
- §4 Funciones con derivada nula, 207
- §5 Crecimiento y decrecimiento de una función, 208
- §6 Condiciones suficientes de extremo local, 212
- §7 Existencia local de función inversa, 215
- §8 Discontinuidades de las funciones derivadas, 217
- §9 Convergencia de esquemas iterativos, 220

#### Lección 15 : LA REGLA DE L'HOSPITAL.

- §1 Introducción, 225
- §2 Curvas en forma paramétrica, 226
- §3 El teorema del valor medio de Cauchy, 231
- §4 La regla de L'Hospital, 234
- §5 La regla de L'Hospital: el caso  $\infty/\infty$ , 239
- §6 Otros casos de aplicación de la regla de L'Hospital, 241

#### Lección 16 : CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

- §1 Introducción, 245
- §2 Funciones convexas, 246
- §3 Propiedades de las funciones convexas, 249
- §4 Extremos de una función convexa, 252
- §5 Funciones convexas derivables, 254
- §6 Puntos de inflexión, 257

#### Leccion 17 : LA INTEGRAL DE RIEMANN

- §1 Introducción, 263
- §2 Funciones integrables, 266
- §3 Ejemplos elementales, 271
- §4 Un criterio de integrabilidad, 274
- §5 Integración de la función potencial, 276
- §6 La integral como límite de sumas, 277
- §7 Integración de las funciones seno y coseno, 281
- §8 Integración de la función potencial de exponente fraccionario, 282

#### Leccion 18 : PROPIEDADES DE LA INTEGRAL.

- §1 Introducción, 287
- §2 Linealidad de la integral, 287
- §3 Integrabilidad del producto de funciones integrables, 291
- §4 Acotación de la integral, 292
- §5 El promedio integral y sus propiedades, 294
- §6 Acotación modular de la integral, 296
- §7 La desigualdad de Schwarz para integrales, 298
- §8 La integral como función del intervalo, 300

#### Leccion 19 : INTEGRABILIDAD Y CONTINUIDAD.

- §1 Introducción, 305
- §2 Continuidad uniforme, 305
- §3 Integrabilidad de las funciones continuas, 309
- §4 Integrabilidad de las funciones continuas a trozos, 309
- §5 El teorema del valor medio, 311
- §6 Sumas de Riemann de una función continua, 315

#### Leccion 20 : EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO.

- §1 Introducción, 321
- §2 La regla de Barrow, 322
- §3 Consecuencias de la regla de Barrow, 324
- §4 Observaciones a la regla de Barrow, 325
- §5 La integral como función del límite superior, 326
- §6 Primitivación de funciones continuas, 329
- §7 El segundo teorema de la media, 331

Leccion 21 : LAS FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA.

- §1 Introducción, 337
- §2 La función logaritmo, 339
- §3 La función exponencial, 342
- §4 Derivación de la función exponencial, 346
- §4 Comportamiento asintótico de las funciones exponencial y logarímic, 349
- §5 Potencias y logaritmos de base arbitraria, 350

Leccion 22 : LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

- §1 Introducción, 357
- §2 Construcción analítica de la función arco tangente, 359
- §3 La función tangente restringida, 363
- §4 Las funciones seno y coseno, 365
- §5 Demostración de la fórmula de adición para las funciones seno y coseno, 368
- §6 Las funciones ciclométricas, 370

Leccion 23 : NOCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

- §1 Introducción, 375
- §2 La ecuación de primer orden, 375
- §3 La ecuación de segundo orden, 380
- §4 El problema homogéneo de segundo orden, 382
- §5 Solución del problema no homogéneo, 387
- §6 Un teorema de unicidad, 390

Leccion 24 : METODOS GENERALES DE INTEGRACION.

- §1 Introducción, 395
- §2 Integración inmediata, 395
- §3 Integración por descomposición en sumandos, 397
- §4 Integración por sustitución, 398
- §5 Integración por partes, 402
- §6 La fórmula de Wallis, 404
- §7 Sobre la existencia de primitivas elementales, 407

Leccion 25 : INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

- §1 Introducción, 411
- §2 Factorización de polinomios reales, 411
- §3 Descomposición en fracciones simples, 413
- §4 Primitivación de funciones racionales, 417
- §5 El método de Hermite, 419

Apéndice: Existencia de la descomposición en fracciones simples, 421

Leccion 26 : INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES.

- §1 Introducción, 427
- §2 Integrales del tipo  $\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_n}) dx$ , 427

- §3 Integrales binomias, 429
- §4 Integrales de la forma  $\int R(x, \sqrt{a + bx + cx^2}) dx$ , 430
- §5 Integración de algunas funciones trascendentes, 432
- §6 Aplicación a la integración de funciones con radicandos cuadráticos, 435

#### Leccion 27 : POLINOMIOS DE TAYLOR.

- §1 Introducción, 439
- §2 Infinitésimos, 441
- §3 Ordenación de un polinomio en potencias de  $x - a$ , 442
- §4 Contactos, 445
- §5 Fórmula de Taylor con resto infinitesimal, 446
- §6 Unicidad de la aproximación local de orden  $n$ , 448

#### Leccion 28 : APLICACIONES DE LA FORMULA DE TAYLOR.

- §1 Introducción, 453
- §2 Funciones exponenciales y trigonométricas, 454
- §3 Fórmula del binomio, 455
- §4 Funciones logaritmo y arco tangente, 457
- §5 Algebra de los polinomios de Taylor, 459
- §6 Extremos y puntos de inflexión, 462
- §7 Círculo osculador, 465

#### Leccion 29 : EL RESTO EN LA FORMULA DE TAYLOR.

- §1 Introducción, 469
- §2 Fórmula integral del resto, 470
- §3 Restos de Lagrange y de Cauchy, 472
- §4 Acotación del resto y convergencia de los polinomios de Taylor, 473
- §5 Forma general del resto de la fórmula de Taylor, 479

#### LECCION 30 : CONVERGENCIA DE SERIES NUMERICAS.

- 1 Introducción.
- 2 Noción de convergencia.
- 3 La serie geométrica.
- 4 Propiedades de una serie convergente.
- 5 Condición previa de convergencia.
- 6 Divergencia de la serie armónica.
- 7 Condición de convergencia de Cauchy.
- 8 El espacio vectorial de las series convergentes.

#### LECCION 31 : SERIES DE TERMINOS NO NEGATIVOS.

- 1 Introducción.
- 2 Propiedad fundamental.
- 3 Convergencia incondicional.

- 4 Comparación por mayoración.
- 5 Comparación por cociente.
- 6 Criterios previos de convergencia.
- 7 Criterios de la raíz y del cociente.
- 8 Criterio de la integral.
- 9 Criterio de Raabe.

#### LECCION 32 : CONVERGENCIA ABSOLUTA.

- 1 Introducción.
- 2 Series no negativas asociadas.
- 3 Series alternadas.
- 4 Constante de Euler.
- 5 Algebra de las series absolutamente convergentes.
- 6 Reordenación de los términos de una serie..

#### LECCION 33 : SERIES DE POTENCIAS.

- 1 Introducción.
- 2 Radio de convergencia.
- 3 Las series de Taylor.
- 4 Algebra de las series de potencias.
- 5 Derivación de las series de potencias.
- 6 El teorema de Abel.
- 7 Aplicaciones y extensiones de las series de potencias.

#### LECCION 34 : EL ESPACIO $\mathbf{R}^n$ .

- 1 Introducción.
- 2 El espacio euclídeo  $\mathbf{R}^n$ .
- 3 Propiedades de la norma euclídea.
- 4 Metrización del espacio  $\mathbf{R}^n$ .
- 5 Sucesiones convergentes.
- 6 La noción general de espacio vectorial normado.
- 7 Norma de una aplicación lineal.

#### LECCION 35 : NOCIONES TOPOLOGICAS BASICAS.

- 1 Introducción.
- 2 Puntos interiores y conjuntos abiertos.
- 3 Conjuntos cerrados.
- 4 Puntos de acumulación.
- 5 La noción general de espacio topológico.

#### LECCION 36 : LIMITES Y CONTINUIDAD.

- 1 Introducción.

- 2 Límites de aplicaciones entre espacios euclídeos.
- 3 Límites radiales.
- 4 Aplicaciones continuas.
- 5 Caracterización topológica de las aplicaciones continuas.

#### LECCION 37 : PROPIEDADES DE LAS APLICACIONES CONTINUAS.

- 1 Introducción.
- 2 Continuidad y conexión.
- 3 Continuidad y compacidad.
- 4 Aplicaciones inversas continuas.
- 5 Continuidad uniforme.

#### LECCION 38 : DERIVACION PARCIAL.

- 1 Introducción.
- 2 Derivación parcial.
- 3 Significado geométrico de las derivadas parciales.
- 4 Cálculo de derivadas parciales.
- 5 Derivadas direccionales.
- 6 Derivabilidad y continuidad.
- 7 Derivación de funciones definidas por integrales.

#### LECCION 39 : DIFERENCIACION DE FUNCIONES.

- 1 Introducción.
- 2 Diferenciabilidad.
- 3 Continuidad y derivabilidad de las funciones diferenciables.
- 4 Significado geométrico de la diferenciabilidad.
- 5 El gradiente de una función.
- 6 Algunos ejemplos de utilización de la idea de diferenciabilidad.
- 7 Una condición suficiente de diferenciabilidad.

#### LECCION 40 : LA REGLA DE LA CADENA.

- 1 Introducción.
- 2 Curvas en  $\mathbf{R}^n$ .
- 3 La regla de la cadena (caso elemental).
- 4 Conservación de la energía en un campo conservativo.
- 5 El teorema del valor medio.
- 6 Funciones homogéneas.

#### LECCION 41 : DERIVACION SUCESIVA.

- 1 Introducción.
- 2 Derivadas parciales segundas.
- 3 El operador laplaciano.

- 4 Igualdad de derivadas cruzadas.
- 5 Una propiedad de los campos de gradientes.
- 6 La matriz hessiana y su significado.
- 7 La diferencial segunda.
- 8 Aproximación local de una función dos veces diferenciable.

#### LECCION 42 : EXTREMOS LIBRES.

- 1 Introducción.
- 2 Puntos estacionarios de una función diferenciable.
- 3 Condiciones necesarias de segundo orden.
- 4 Revisión de propiedades de formas cuadráticas.
- 5 Condiciones suficientes de extremo local.
- 6 El criterio de Sylvester para formas cuadráticas.

#### LECCION 43 : DIFERENCIACION DE APLICACIONES.

- 1 Introducción.
- 2 Aplicaciones diferenciables.
- 3 Matriz jacobiana de una aplicación.
- 4 La regla de la cadena.
- 5 Plano tangente a una superficie parametrizada.

#### LECCION 44 : EL METODO DE NEWTON-RAPHSON.

- 1 Introducción.
- 2 El método de Newton-Raphson..
- 3 El teorema del valor medio.
- 4 Aplicaciones contractivas.
- 5 Convergencia del método de Newton-Raphson.

#### LECCION 45 : EL TEOREMA DE LA APLICACION INVERSA.

- 1 Introducción.
- 2 Aplicaciones localmente inyectivas.
- 3 Aplicaciones localmente suprayectivas.
- 4 El teorema de la aplicación inversa.

#### LECCION 46 : FUNCIONES IMPLICITAS.

- 1 Introducción.
- 2 Funciones definidas implícitamente.
- 3 El teorema de la función implícita (caso elemental).
- 4 Derivación de funciones implícitas.
- 5 Transformaciones definidas por un sistema de ecuaciones.