TEMARIO DE AMPLIACION DE CALCULO

PRIMERA PARTE: INTEGRACION MULTIPLE

1 Integrales múltiples

1.1.- **LA INTEGRAL MULTIPLE DE RIEMANN.** Integral de Riemann de una función acotada sobre un rectángulo. Primeras propiedades de la integral. Criterio de integrabilidad de Lebesgue. Conjuntos medibles-Jordan. La integral sobre conjuntos medibles-Jordan.

1.2.- **CALCULO DE INTEGRALES MULTIPLES.** Funciones definidas por integrales. Integración reiterada. Cambios de variables en integrales múltiples. Aplicaciones geométricas y físicas de las integrales múltiples.

1.3.- **INTEGRALES IMPROPIAS.** Integrales impropias de Riemann de funciones de una variable. Nociones sobre integrales impropias dependientes de un parámetro. Las funciones Gamma y Beta de Euler. Integrales impropias múltiples. Ejemplos y aplicaciones.

2 Integrales curvilíneas

2.1.-**CURVAS.** Arcos de curva parametrizados. Cambios de parámetro. Curvas rectificables y longitud de un arco de curva regular. Integración sobre curvas.

2.2.- **INTEGRALES CURVILINEAS.** Circulación de un campo vectorial. Propiedades de las integrales curvilíneas. Gradiente de un campo escalar. Campos vectoriales conservativos.

2.3.- **CAMPOS IRROTACIONALES.** Rotacional de un campo vectorial. Campos irrotacionales y campos de gradientes. Dominios estelares. Potencial escalar de un campo irrotacional en un dominio estelar.

2.4.- **TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO**. La fórmula de Green para un rectángulo. Arcos y curvas de Jordan. Enunciado del Teorema de la Curva de Jordan. Teorema de Green en dominios simplemente conexos. Campos irrotacionales sobre dominios simplemente conexos.

3 Integrales de superficie

3.1.- **SUPERFICIES**. Superficies parametrizadas. Plano tangente y recta normal. Area de una superficie parametrizada. Integración de un campo escalar sobre una superficie.

3.2.- **INTEGRALES DE SUPERFICIE**. Superficies de una y dos caras. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie. Divergencia de un campo vectorial. Superficies cerradas. El Teorema de Gauss. Ejemplos y aplicaciones.

3.3.- **EL TEOREMA DE STOKES**. Enunciado del Teorema de Stokes. Campos solenoidales y campos de rotacionales. Potencial vector de un campo solenoidal en un dominio estelar. Ejemplos y aplicaciones.

BIBLIOGRAFIA

Bartle, R.G. *Introducción al Análisis Matemático.* Limusa. México. (1980).

Fulks, W. *Cálculo Avanzado.* Limusa. México. (1978).

Marsden, J.E.; Tromba; A.J. *Cálculo Vectorial.* Fondo Educativo Interamericano. Bogotá. (1981).

Fernández Vina, J.A.; Sánchez Manes, Eva. *Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático. Tomo 3.* Tecnos. Madrid. (1993).

TEMARIO DE AMPLIACION DE CALCULO

SEGUNDA PARTE: FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

1 Los números complejos

1.1.- El cuerpo C de los números complejos: suma producto y cociente de números complejos. La unidad imaginaria. Imposibilidad de ordenación en el cuerpo C.

1.2.- El plano complejo. Módulo y argumento de un número complejo. La conjugación compleja. Representación polar y módulo-argumental de un número complejo. Fórmula de De Moivre. Fórmulas de Euler.

1.3.- Potencias enteras y raíces de índice natural de un número complejo. Representación gráfica. Las raíces n-ésimas de la unidad.

2 Nociones de topología y continuidad

2.1.- Nociones elementales de topología en el plano complejo. Distancia, bolas abiertas y cerradas, conjuntos abiertos y cerrados. Interior, adherencia y frontera de un conjunto en C. Conjuntos abiertos y conexos.

2.2.- Sucesiones de números complejos, sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy. Caracterización por sucesiones de los conjuntos cerrados en C. Conjuntos compactos.

2.3.- Funciones complejas de una variable compleja, partes real e imaginaria. Límite de una función compleja de variable compleja en un punto. Continuidad en un punto, propiedades algebráicas, continuidad de la función compuesta. Continuidad en un conjunto, funciones continuas en conjuntos conexos y en conjuntos compactos. Continuidad uniforme.

3 Funciones holomorfas

3.1.- Derivada en un punto de una función compleja de variable compleja. Propiedades algebraicas: derivación de sumas, productos y cocientes. Relación con la continuidad. Derivada de la función compuesta: regla de la cadena. Derivada de la función inversa. Caracterización de las funciones constantes en conjuntos abiertos y conexos del plano complejo.

3.2.- Definición de función holomorfa en un punto y en un conjunto. Ejemplos. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Funciones armónicas y funciones armónicas conjugadas. Método de Milne-Tompson para la determinación de funciones armónicas conjugadas.

3.3.- Funciones holomorfas con parte real o imaginaria constante. Funciones holomorfas con módulo o argumento constante.

4 Las funciones elementales

4.1.- Series de números complejos. Convergencia y convergencia absoluta. Series funcionales complejas. Nociones sobre la convergencia uniforme.

4.2.- Límite superior de una sucesión de números reales. Series de potencias complejas. Radio de convergencia de una serie de potencias y comportamiento de la serie en su círculo de convergencia. Cálculo del radio de convergencia.

4.3.- Las series de potencias son funciones holomorfas en su círculo de convergencia. Derivación término a término de una serie de potencias.

4.4.- La función exponencial de variable compleja. Derivada. Ley de suma de los exponentes y consecuencias. Funciones hiperbólicas.

4.5.- Las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} z$, $\cos z$. Derivadas. Relación con la función exponencial compleja: fórmulas de Euler.

4.6.- La función logaritmo. Ramas de una función multiforme. Rama principal del logaritmo; construcción de las diferentes ramas del logaritmo complejo. Derivada.

5 La integral compleja curvilínea

5.1.- Caminos regulares y regulares a trozos en el plano complejo. Caminos cerrados. Arcos y curvas de Jordan regulares a trozos. Expresión de la longitud de un camino regular a trozos mediante una integral.

5.2.- Construcción de la integral compleja curvilínea sobre caminos regulares a trozos en el plano complejo. Reducción a una integral simple. Propiedades algebraicas. Descomposición en trozos del camino de integración. Comportamiento de la integral bajo cambios de parámetro. Reducción de la integral a dos integrales curvilíneas reales.

5.3.- Teorema de acotación de la integral.

5.4.- Existencia de primitivas. Integración de una derivada a lo largo de un camino cerrado. Independencia del camino.

6 El Teorema de Cauchy y la Fórmula Integral de Cauchy

6.1.- El Teorema de Cauchy en conjuntos abiertos convexos para funciones holomorfas salvo quizás en una cantidad finita de puntos en los que la función es continua. Independencia del camino.

6.2.- Indice de una curva cerrada con respecto a un punto. Continuidad del índice: es constante sobre las diferentes componentes conexas en que la curva divide al plano complejo y es nulo sobre la componente no acotada.

6.3.- Fórmula integral de Cauchy para funciones holomorfas en conjuntos abiertos conexos. Ejemplos notables: curvas de índice uno.

6.4.- Desarrollo en serie de potencias de las funciones holomorfas. Fórmula de Taylor. Expresión integral de las derivadas n-ésimas de una función holomorfa. Estimaciones de Cauchy para las derivadas.

6.5.- Funciones enteras. Teorema de Liouville. Una demostración del Teorema Fundamental del Algebra.

6.6.- Teorema de Morera.

6.7.- Extensión de la fórmula integral de Cauchy al caso de varias curvas. Teorema global de Cauchy. Condición de sustitución de los caminos de integración en las integrales complejas curvilíneas.

7 Ceros de las funciones holomorfas

7.1.- Definición del conjunto $Z(f)$ de los ceros de una función holomorfa. Cada punto de $Z(f)$ o bien es un punto aislado o bien es un punto interior.

7.2.- Estructura de $Z(f)$: si tiene puntos de acumulación, entonces f es la función nula. En otro caso, los ceros de f son puntos aislados y en cantidad a lo sumo numerable. Orden ó multiplicidad de un cero. Identificación de funciones holomorfas.

8 Singularidades aisladas

8.1.- Definición de singularidad aislada. Clasificación: singularidades evitables, polos y singularidades esenciales. Caracterización de las singularidades evitables.

8.2.- Caracterización de los polos. Orden de un polo. Desarrollo en serie de potencias de una función alrededor de un polo. Parte singular del desarrollo.

8.3.- Anillos en el plano complejo. Desarrollo en serie de Laurent de una función alrededor de una singularidad aislada. Partes regular y singular del desarrollo. Clasificación de las singularidades aisladas con ayuda del desarrollo en serie de Laurent.

8.4.- Residuos. Definición. Cálculo del residuo de una función en una singularidad evitable y en un polo. Teorema de los residuos.

8.5.- Aplicación del teorema de los residuos al cálculo de ciertas integrales reales. Integrales de funciones racionales en $\operatorname{sen} t$, $\cos t$. Integrales impropias de funciones racionales. Lemas de Jordan. Integrales impropias cuyo integrando es producto de una función racional por una función sen o cos. Cálculo de algunas integrales notables: integrales de Fresnel, etc.

8.6.- Aplicación del teorema de los residuos al cálculo del número de ceros de una función holomorfa. Teorema de Rouché.

BIBLIOGRAFIA

Levinson, N.; Redheffer, R.M. *Curso de Variable Compleja.* Reverté. Barcelona (1990).

Fernández Vina, J.A.; Sánchez Manes, Eva. *Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático. Tomo 3.* Tecnos. Madrid. (1993).