

Un modelo Semilagrangiano de Elementos Finitos de alto orden para resolver las Ecuaciones Primitivas del océano

PEDRO GALÁN DEL SASTRE

Depto. de Matemáticas, U. Castilla-La Mancha

RODOLFO BERMEJO

Depto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial, U. Politécnica de Madrid

Palabras clave: Ecuaciones Primitivas del océano, Elementos Finitos de alto orden, esquema semilagrangiano.

Clasificación para el Cedy 2005: Análisis numérico.

1. Introducción

Las Ecuaciones Primitivas para el océano son un sistema de EDP no lineales que pretenden modelar la circulación del océano. Este sistema se compone esencialmente de las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido 3D incompresible y en rotación, sujetas a las hipótesis simplificadoras de Boussinesq, capa delgada e hidrostática, acopladas a las ecuaciones de advección-difusión para salinidad y temperatura, junto con una ecuación de estado para la densidad.

Las grandes dificultades numéricas que presentan este tipo de modelos son los términos de advección (términos no lineales), la divergencia nula del fluido que estamos tratando (que se desprende de la incompresibilidad del océano), y desde un punto de vista computacional, la tridimensionalidad del problema (que puede incrementar prohibitivamente el número de grados de libertad).

Combinando el método de elementos finitos de alto orden con un esquema semilagrangiano, podemos discretizar los términos advectivos de las ecuaciones sin necesidad de restringir el paso temporal por problemas de estabilidad. En concreto, en este trabajo se presentan algunos resultados con pasos temporales de un orden 10 veces superior al utilizado hoy día en modelos de estudios oceanográficos [4].

El problema de la divergencia nula se estudia utilizando un algoritmo de gradiente conjugado para la presión [2]. Si bien este tipo de esquemas puede resultar poco atractivo desde el punto de vista computacional para problemas 3D, mostramos que en este modelo se puede hacer una formulación en dimensión dos, gracias a la hipótesis de hidrostática, que hace competitivo el esquema propuesto.

Por último, la tridimensionalidad del problema, que es esencial para estudios climáticos y meteorológicos, se resuelve mediante la utilización de técnicas de paralelización computacional. Para ello, la idea principal consiste en realizar un cambio de variable, llamado σ *coordinate*, [3], [4], que convierte el dominio de estudio en un cilindro. Esto permite la resolución de ciertos problemas 3D de tipo elíptico paralelizando mediante capas horizontales, lo que permite un gran ahorro en tiempo de cálculo.

2. Las Ecuaciones Primitivas del Océano

El estudio de las corrientes dominantes que se producen en los océanos se modelan, como cualquier otro fluido, mediante las ecuaciones de Navier-Stokes. En el caso particular del océano, es bien conocido que las diferencias de densidad entre ciertas regiones, producen movimientos importantes para el estudio de este fluido. Por ello, las ecuaciones de Navier-Stokes van acopladas a sendas ecuaciones de transporte-difusión para dos variables clave en la dinámica de los océanos: la temperatura y la salinidad. Estrictamente hablando, la temperatura y la salinidad influyen únicamente en la densidad del fluido; y es precisamente la diferencia de densidad entre regiones, la que puede producir movimiento en el fluido. Más concretamente, las ecuaciones de estudio pueden

presentarse sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ y con un sistema de referencia cartesiano, de la siguiente manera (una vez realizada la aproximación de Boussinesq, [4]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \operatorname{div}(A \nabla \vec{u}) + f \vec{u}^\perp = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}, \text{ en } D \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0, \text{ en } D \\ +CC \text{ para } \vec{u} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - \operatorname{div}(k \nabla T) = 0, \text{ en } D \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S - \operatorname{div}(k \nabla S) = 0, \text{ en } D \\ +CC \text{ para } T \text{ y } S \\ \rho = \rho(T, S, p), \text{ en } D \end{array} \right. \quad (1)$$

donde $\vec{u} = (u, v, w)$ es la velocidad del fluido es sus tres componentes espaciales, p es la presión, T la temperatura, S la salinidad y ρ la densidad del fluido (que está relacionada con T, S y p mediante la ecuación de estado, [9]); $\vec{g} = (0, 0, -g)$ es la aceleración debida a la fuerza de la gravedad, y

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega \text{ y } -H(x, y) < z < 0\}$$

siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ la superficie del océano y $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función que describe la profundidad del océano.

El tratamiento numérico de las ecuaciones (1) se convierte en un problema muy complejo debido a varios factores. Por ello, se realizan las siguientes simplificaciones.

2.1. La aproximación hidrostática

Quizás la principal aproximación que suele utilizarse para abordar las ecuaciones (1) es la aproximación hidrostática. Ésta se basa principalmente en la hipótesis de capa delgada del dominio D , esto es, $H \ll L$, donde H es la longitud vertical característica del dominio y L la horizontal. Mediante un estudio asintótico, la ecuación que involucra a la componente vertical de la velocidad w ,

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla w - \operatorname{div}(A \nabla w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$$

se convierte en

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \iff \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2)$$

(ver [8]).

Además, las variaciones de la densidad son pequeñas en comparación con un valor promedio ρ_0 . Por ello, bajo las hipótesis de Boussinesq (ver [4]), los términos horizontales del gradiente se pueden aproximar por

$$\frac{1}{\rho} \nabla p \sim \frac{1}{\rho_0} \nabla p$$

2.2. Las constantes de difusión

Debido también a la diferencia de escalas horizontales y verticales, las constantes de difusión en (1) se pueden separar en horizontal y vertical, y además suponerlas constantes en cada dirección. Así, las constantes de difusión se pueden expresar de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} A_h & 0 & 0 \\ 0 & A_h & 0 \\ 0 & 0 & A_v \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad k = \begin{pmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_h & 0 \\ 0 & 0 & k_v \end{pmatrix}$$

De esta forma los términos difusivos en (1) quedan:

$$\operatorname{div}(k \nabla T) = k_h \Delta T + k_v \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

(análogamente para u, v, S).

2.3. Condiciones de Contorno

Completando las ecuaciones (1), se consideran las siguientes condiciones de contorno para la velocidad \vec{u} y para la temperatura y salinidad T y S :

$$\begin{aligned} \vec{u} = 0, \text{ en } \Gamma_b \cup \Gamma_l \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial S}{\partial \vec{n}}, \text{ en } \Gamma_b \cup \Gamma_l \\ \left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \tau_1 \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = \tau_2 \\ w = 0 \end{aligned} \right\}, \text{ en } \Gamma_s \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = -\alpha_T (T - T_A) \\ \frac{\partial S}{\partial \vec{n}} = 0 \end{aligned} \right\}, \text{ en } \Gamma_s \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\Gamma_s \cup \Gamma_l \cup \Gamma_b = \partial D$ (Γ_s corresponde con la superficie del océano, Γ_b el fondo oceánico y Γ_l las fronteras laterales que cierran el dominio), $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ son los esfuerzos del viento que actúan sobre la superficie del océano, T_A la temperatura del aire y α_T una constante.

Obsérvese que con estas condiciones de contorno, el dominio se supone cerrado (es decir, no existe entrada ni salida de masas de agua), y que no existe transferencia de calor ni de salinidad salvo en la superficie del océano.

Con todas estas simplificaciones, las ecuaciones (1) quedan de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla u - A_h \Delta_h u - A_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - fv &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x}, \text{ en } D \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla v - A_h \Delta_h v - A_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + fu &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y}, \text{ en } D \\ \rho g &= -\frac{\partial p}{\partial z}, \text{ en } D \\ \text{div } \vec{u} &= 0, \text{ en } D \\ +CC \text{ para } \vec{u} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T - k_h \Delta_h T - k_v \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} &= 0, \text{ en } D \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla S - k_h \Delta_h S - k_v \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} &= 0, \text{ en } D \\ +CC \text{ para } T \text{ y } S \\ \rho &= \rho(T, S, p), \text{ en } D \end{aligned} \right. \quad (4)$$

junto con las condiciones de contorno (3).

3. Tratamiento numérico del problema

Para tratar numéricamente las ecuaciones (4), los puntos sobre los que centrar la atención son: (i) esquema de discretización temporal, (ii) discretización temporal de términos convectivos, (iii) discretización espacial, y (iv) tratamiento de la presión.

- (I) *Esquema de discretización temporal*: Esquema tipo BDF de orden 2 implícito para todos los términos, salvo para el término de Coriolis, que será explícito a fin de conservar la simetría del operador a invertir (ver [6] para detalles).
- (II) *Discretización temporal de términos convectivos*: Esquema semilagrangiano (ver [1] y sus referencias), con objeto de no tener que restringir el paso temporal por inestabilidades de tipo no-lineal.
- (III) *Discretización espacial*: Con idea de utilizar elementos finitos de alto orden y poder paralelizar el código, el dominio D se transforma en $\hat{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega \text{ y } -1 < z < 0\}$. Una vez planteadas las ecuaciones en \hat{D} , la discretización de alto orden se realiza mediante elementos cuadrangulares en la superficie, y capas verticales que forman cilindros de base cuadrangular. Las funciones base en cada elemento quedan de la siguiente forma:

$$\phi_k(x, y, z) = \varphi_i(x, y) \psi_j(z)$$

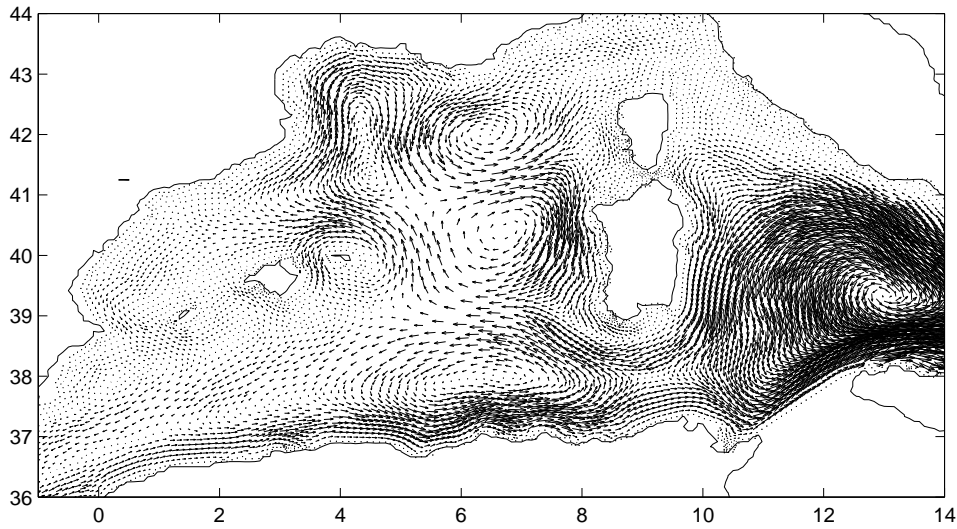


Figura 1: Promedio sobre la vertical de las velocidades horizontales después de un mes de integración numérica.

1. Calculamos T^{n+1} y S^{n+1} (problema elíptico 3D).
2. Calculamos ρ^{n+1} mediante la ecuación de estado.
3. Resolvemos (6) para obtener p_s (problema de Stokes 2D).
4. Resolvemos (5) para calcular \vec{u}^{n+1} (problema elíptico 3D).

Obsérvese que las mayores dificultades desde el punto de vista computacional vienen a la hora de resolver los problemas para las variables tridimensionales. Sin embargo, debido a (III) estos problemas se pueden paralelizar por niveles, lo que permite un gran ahorro en tiempo de cálculo.

4. Una aplicación al Mar Mediterráneo

Como ejemplo de aplicación del modelo propuesto, se elige una aplicación al Mar Mediterráneo considerando densidad constante, es decir, sin considerar en el modelo las variables T y S . Para ello, el dominio que se toma corresponde con el Mar Mediterráneo occidental, incluyendo una pequeña región al oeste del estrecho de Gibraltar, y cerrado en Sicilia.

Los esfuerzos de viento considerados son los calculados en [5], vientos utilizados para estudios climatológicos. Además, la batimetría utilizada es realista, obtenida de la base de datos ETOPO5.

Las discretizaciones utilizadas pasan por polinomios de orden dos en la horizontal y polinomios de orden seis en la vertical. La discretización se realiza mallando la superficie del océano mediante elementos cuadrangulares (con 38980 grados de libertad, $\Delta x \sim 5 \text{ km}$) para formar elementos 3D cilíndricos con base los elementos cuadrangulares, en un total de 30 capas. En total, el número de grados de libertad para cada variable tridimensional es de 1208380. El paso temporal es de 3 horas, lo que mejora notablemente los modelos convencionales (que utilizan pasos temporales del orden de 10 – 15 min.).

En la Figura 1 mostramos el promedio en la vertical de las velocidades horizontales que se obtiene después de un mes de integración numérica. En la figura se observa como las corrientes principales existentes en esta región del Mediterráneo se reproducen perfectamente (corriente oeste-este en el sur del dominio, junto con una recirculación en el sentido contrario a las agujas del reloj en el dominio). Sin embargo, algunos de los vortices que se obtienen no son suficientemente realistas, debido a que se está considerando una densidad constante y a que no hemos tenido en cuenta la entrada de masas de agua provenientes del Océano Atlántico a través del estrecho.

Bibliografía

- [1] A. Allievi, R. Bermejo. *Finite element modified method of characteristic for the Navier-Stokes equations*. Int. J. Numer. Methods Fluids, **32** (2000), 439–464.
- [2] E. J. Dean; R. Glowinski. *On some Finite Element Methods for Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flow*, Incompressible Computational Fluid Dynamics, 17–65, Cambridge University Press (1993).
- [3] E. Deleersnijder; K. G. Ruddick. *A Generalized Vertical Coordinate for 3D Marine Models*. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, **61**, 6 (1992), 489–502.
- [4] D. B. Haidvogel; A. Beckmann. “Numerical Ocean Circulation Modeling”, Imperial College Press, 1999.
- [5] S. Hellerman; M. Rosenstein. *Normal monthly wind stress over the world ocean with error estimates*. J. Phys. Ocean., **13**, 7 (1983), 1093–1104.
- [6] A. Iserles. “A first course in the numerical analysis of differential equations”. Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [7] G.E. Karniadakis; S.J. Sherwin. “Spectral/hp element methods for CFD”. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York (1999).
- [8] J. Pedlosky. “Geophysical Fluid Dynamics”. Springer-Verlag, New York, 2ª edición (1987).
- [9] UNESCO. *Tenth report of the joint panel on oceanographic table and standards*. UNESCO Technical Papers in Marine Sci., **36** (1981), UNESCO, Paris.