

ASIGNATURA:
ECUACIONES DIFERENCIALES

Del 4.º semestre del Plan de Estudios del
año 2.000 de la carrera de Ingeniero Industrial
de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros
Industriales de la
Universidad Politécnica de Madrid.

Departamento de Matemática Aplicada
a la Ingeniería Industrial.

Curso 2.010-2.011

Febrero 2.011

GUÍA DE LA ASIGNATURA.

OBJETIVOS DOCENTES Y METODOLOGÍA.

La asignatura Ecuaciones Diferenciales está orientada fundamentalmente a las aplicaciones y a la modelización de procesos de evolución, por lo que su desarrollo es esencialmente práctico.

Sus contenidos están divididos en dos partes: en la primera, se desarrollan los resultados fundamentales de ecuaciones diferenciales ordinarias, con el objetivo prioritario de que los alumnos comprendan aspectos geométricos y cualitativos cuyo interés en las aplicaciones es hoy día incuestionable; en la segunda parte, se presenta una panorámica sobre métodos de Matemática Aplicada, incluyéndose nociones sobre ecuaciones en derivadas parciales, (específicamente, presentación de los denominados problemas de la Física Matemática: ecuaciones de ondas, del calor y de Laplace), método de separación de variables, cálculo de variaciones y series de Fourier.

Los alumnos disponen del temario detallado de la asignatura que se adjunta y de una colección muy extensa de problemas propuestos, cuyas soluciones se encuentran en su mayoría en las referencias bibliográficas.

Debido a la diversidad de temas que configuran los contenidos de esta asignatura, no existe ningún libro de fácil acceso para los estudiantes que pueda servir de texto global, por lo que se recomienda bibliografía diferente para cada parte del temario.

MÉTODO DE EVALUACIÓN.

La evaluación de los alumnos se basa fundamentalmente en las calificaciones de un único examen final oficial, del que existen cada año tres convocatorias: Febrero, Junio y Septiembre. Se realizará en las fechas fijadas por la Jefatura de Estudios, debiéndose identificar en cada uno de ellos los alumnos presentando un carnet oficial.

Cada examen final oficial tendrá un contenido referido a todo el Programa de la asignatura. Constará de un problema que se puntuará con 4 puntos y dos ejercicios puntuados con 3 puntos cada uno de ellos. Su duración es de dos horas y media y en él no se podrán utilizar libros, apuntes ni calculadoras u ordenadores personales.

TUTORÍAS.

Los Profesores de la asignatura estarán a disposición de los alumnos en un horario de tutorías que se hará público a principios de curso.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA.

E. Sánchez, J. González y J. Gutiérrez (2003). Sistemas Dinámicos. Una introducción a través de ejercicios (2ª edición). Sección de Publicaciones de la E.T.S.I. Industriales de la U.P.M.

R. Nagle y E. Saff (1992). Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales. Addison-Wesley Iberoamericana.

W. Derrick y S. Grossman (1984). Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones. Fondo Educativo Interamericano.

PROGRAMA.

Tema 1. MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (E.D.O.)

1.1. Definiciones sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.). Soluciones. Problemas de valor inicial o de Cauchy.

1.2. E.D.O. exactas. Función potencial. Factores integrantes.

1.3. E.D.O. de variables separables, homogéneas y reducibles a homogéneas.

1.4. E.D.O. lineales de primer orden.

1.5. E.D.O. de Bernouilli y de Riccati.

Tema 2. SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

2.1. Repaso de los sistemas de E.D.O. lineales de primer orden y coeficientes constantes. Sistemas diferenciales diagonalizables en \mathbb{R} y en \mathbb{C} .

2.2. Caso general: exponencial de una matriz.

2.3. Sistemas diferenciales no homogéneos: fórmula de variación de las constantes.

2.4. Espacio de fases de los sistemas lineales en el plano: focos, nodos, puntos y centros.

2.5. Sistemas lineales en diferencias finitas de primer orden y con coeficientes constantes. Matrices positivas y aplicaciones: procesos de Markov y modelo de Leslie.

Tema 3. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n .

3.1. Repaso de las E.D.O. lineales de orden n y coeficientes constantes. Sistema diferencial equivalente.

3.2. Estructura del espacio de soluciones.

3.3. E.D.O. lineal no homogénea. Métodos de variación de las constantes y de los coeficientes indeterminados.

3.4. Nociones sobre la E.D.O. lineal de orden n y coeficientes variables. Ecuaciones de Euler. Reducción del orden.

3.5. Ecuaciones en diferencias finitas lineales y con coeficientes constantes.

Tema 4. SISTEMAS DIFERENCIALES NO LINEALES.

4.1. Sistemas diferenciales no lineales autónomos y no autónomos. Existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy. Prolongabilidad de soluciones.

4.2. Órbitas o trayectorias y puntos de equilibrio.

4.3. Espacio de fases y espacio de fases ampliado.

4.4. Integrales primeras.

Tema 5. ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO.

5.1. Puntos de equilibrio estables, asintóticamente estables e inestables.

5.2. Estabilidad por el método de linealización. Puntos de equilibrio hiperbólicos. Teorema de Hartman-Grossman.

5.3. Funciones de Liapunov. Método directo de Liapunov.

5.4. Sistemas dinámicos discretos. Diagramas cobweb. Puntos de equilibrio y estabilidad.

Tema 6. SOLUCIONES PERIÓDICAS.

6.1. Órbitas cerradas y ciclos límite.

6.2. Sistemas diferenciales planos: teoremas de Poincaré, Bendixson y Poincaré-Bendixson.

6.3. Sistemas gradiente.

6.4. Soluciones periódicas en sistemas dinámicos discretos: un ejemplo de caos.

Tema 7. APLICACIONES.

7.1. Mecánica: sistemas conservativos.– El péndulo no lineal.

7.2. Ecología: modelos predador-presa de Lotka-Volterra.– Especies en competición.

7.3. Electricidad: oscilador de Van der Pol.

7.4. Otros: modelos económicos, epidemias, etc..

7.5. Introducción a los sistemas dinámicos dependientes de un parámetro: bifurcación.

Tema 8. SERIES DE FOURIER.

8.1. Sistemas de funciones ortogonales y ortonormales en el espacio $L^2([a, b])$.

8.2. Serie de Fourier de una función con respecto a un sistema ortonormal. Coeficientes de Fourier.

8.3. Aproximación en media cuadrática. Desigualdad de Bessel. Identidad de Parseval. Sistemas ortonormales completos.

9.4. Series trigonométricas de Fourier. Lema de Riemann-Lebesgue. Convergencia puntual.

9.5. Escritura compleja de la serie trigonométrica de Fourier. Desarrollos en serie trigonométrica de Fourier de funciones pares e impares. Desarrollos de medio rango.

Tema 9. SEPARACIÓN DE VARIABLES.

9.1. Problemas de contorno: conjuntos de autofunciones. Ecuaciones de Bessel, Legendre y Hermite.

9.2. Nociones sobre la completitud de conjuntos de autofunciones. Teorema de Sturm-Liouville.

9.3. Aplicación del método de separación de variables y obtención de la solución formal en algunos ejemplos:

- a) Problema de la cuerda vibrante.
- b) Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace en un cuadrado y en un círculo, y fórmula de Poisson.
- c) Ecuación del calor.

Tema 10. CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES (E.D.P.) LINEALES DE SEGUNDO ORDEN.

10.1. E.D.P. lineales y cuasilineales de segundo orden y dos variables independientes. Ecuaciones de la Física Matemática: ecuación de ondas, del calor y de Laplace.

10.2. El problema de Cauchy para una E.D.P. de segundo orden cuasilineal y dos variables independientes. Curvas características.

10.3. Clasificación y formas canónicas: E.D.P. hiperbólicas, parabólicas y elípticas.

Tema 11. LA ECUACIÓN DE ONDAS.

11.1. Solución de D'Alembert al problema de valor inicial para la ecuación de ondas.

11.2. Dominio de dependencia y de influencia de la solución en un punto.

11.3. Problemas no homogéneos: cuerdas con fuerzas exteriores.

11.4. Cuerdas finitas con condiciones en los extremos.

11.5. Otros métodos de resolución de problemas de valor inicial para E.D.P. Aplicación de la transformada de Laplace y de Fourier.

Tema 12. TRANSFORMADA DE LAPLACE.

12.1. Transformada de Laplace de una función de orden exponencial. Abscisa de convergencia. Propiedades de la transformada de Laplace.

12.2. Inyectividad de la transformada de Laplace. Fórmula de inversión.

12.3. Transformada de Laplace de un producto de convolución.

12.4. Aplicaciones de la transformada de Laplace: resolución de problemas de valor inicial para E.D.O. y para sistemas diferenciales, ecuaciones integrales y problemas de Cauchy para E.D.P.