Sistemas Dinámicos

Una introducción a través de ejercicios

Quinta edición

Eva Sánchez José González Joaquín Gutiérrez

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Sistemas Dinámicos.
Una introducción a través de ejercicios

E. Sánchez, J. González y J. Gutiérrez

Se muestran en este documento algunas páginas del libro, que puede adquirirse en la Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid.

Índice general

Índice de figuras

Prólogo

La presente colección de ejercicios ha sido redactada con la intención de ayudar en el estudio a aquellos alumnos que se enfrentan por vez primera a un curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Hemos puesto el énfasis en el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos, como herramienta importante para la comprensión del comportamiento de procesos de evolución. Este es un enfoque moderno y en continuo desarrollo por su gran interés desde el punto de vista de las aplicaciones, como puede comprobarse con una revisión de la bibliografía extensísima y en continua expansión que actualmente se dedica a los sistemas dinámicos y sus aplicaciones en diversos campos de la ciencia, como son la Física, la Biología o la Economía. Somos conscientes de la carencia que supone el no incluir aspectos de cálculo numérico, que no solo son indispensables en un estudio más profundo, sino que aclaran e impulsan el desarrollo de multitud de aspectos.

Sin embargo, razones de espacio y tiempo disponibles para efectuar una programación de contenidos coherente y realista con las posibilidades de asimilación en un curso de un semestre, nos han obligado a efectuar una elección, que siempre conlleva una renuncia. No hemos de ocultar que han influido en ella, además del convencimiento de la importancia y actualidad del estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales, nuestras preferencias personales. Por otra parte, descarga algo nuestra inquietud la seguridad de que los estudiantes tienen múltiples ocasiones de encontrarse con el Cálculo Numérico en sus diferentes aspectos.

Dedicamos un primer capítulo a los métodos de resolución elemental de ecuaciones diferenciales ordinarias. Comenzar el estudio aprendiendo gran variedad de técnicas de integración puede conducir a la impresión errónea de que la resolución explícita de las ecuaciones diferenciales de primer orden es tan solo un problema de habilidad y experiencia en el manejo de cálculos complicados. Nada más lejos de la realidad, ya que el colectivo de ecuaciones diferenciales ordinarias que admiten resolución explícita es muy reducido. Por ello, en la aplicación a problemas prácticos, los métodos aproximados para un análisis cuantitativo de las soluciones y los métodos cualitativos son esenciales. Sin embargo, es necesario adquirir alguna experiencia en la obtención de soluciones, por lo que animamos al lector a resolver los ejercicios que se proponen en este primer capítulo.

Nuestra intención no ha sido escribir un libro teórico sobre ecuaciones diferenciales, porque ya existe muy variada bibliografía escrita por autores de gran competencia en el tema, que cubre cualquier aspecto que se desee, numérico o cualitativo.

Sin embargo, no hemos dudado en introducir la teoría necesaria, sin efectuar casi nunca demostraciones, que pueda ayudar a conseguir una mejor comprensión de los métodos expuestos. Al mismo tiempo, hemos procurado que el texto sea autosuficiente, de manera que el lector que solo desee aprender a manejar ciertas técnicas, pueda lograrlo. Hemos procurado que los enunciados de los teoremas sean claros y precisos, aunque no aparezca su demostración en la mayoría de los casos.

Estas notas están dedicadas a estudiantes que no tienen una base matemática muy avanzada, con la intención de que puedan adentrarse en el campo de las aplicaciones sin perderse en desarrollos matemáticos de un nivel superior al suyo. Hemos hecho hincapié en conseguir una presentación clara de ciertos conceptos técnicos, relacionados principalmente con la teoría de la estabilidad de los sistemas dinámicos y sus aplicaciones, aun a costa de prescindir del formalismo y del rigor extremo.

Creemos que el interés y la originalidad que puedan aportar estas notas se deben esencialmente al criterio de selección de los ejercicios y a su presentación, orientada a la modelación de procesos físicos y naturales y, en esta línea, esperamos que sirvan de ayuda para la utilización posterior de textos especializados. La mayor parte de los ejercicios y de las ideas que subyacen en las aplicaciones se han tomado de otros textos, artículos y exámenes propuestos en centros universitarios.

Se incluye al final una breve lista de referencias bibliográficas, con los principales textos que hemos utilizado en la redacción de este trabajo.

Agradecemos al Profesor Bernardo de la Calle la lectura cuidadosa que ha efectuado de este texto así como las modificaciones que ha sugerido.

Madrid, Octubre de 2012

Primera edición: Enero de 1999
Segunda edición: Noviembre de 2003
Tercera edición: Enero de 2006
Cuarta edición: Marzo de 2010

Capítulo 1

Métodos elementales de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

1.1. Definiciones y ejemplos

Una *ecuación diferencial ordinaria* (E.D.O.) es una expresión de la forma:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

en la que F es una función escalar de $n+2$ variables, definida en un dominio (abierto y conexo) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, x es la variable independiente, la función incógnita es $y = y(x)$, siendo $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ sus derivadas sucesivas.

Recibe el adjetivo de *ordinaria* para distinguirla de las *ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* (E.D.P.), que son aquellas en las que la función incógnita depende de varias variables independientes, por lo que figuran en la ecuación algunas de sus derivadas parciales.

Se llama *orden* de una E.D.O. al orden máximo de derivación de la función incógnita que figura en la ecuación. Si la ecuación es algebraica en esta derivada de orden máximo, se llama *grado* de la E.D.O. al mayor exponente que afecte a esa derivada.

Si una E.D.O. de orden n está escrita en la forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

diremos que está escrita en *forma normal* o *canónica*.

Definición 1.1 (solución de una E.D.O.) Se dice que $y = \varphi(x)$, $x \in]a, b[$, es una *solución* de la E.D.O. (1.1) si satisface las condiciones siguientes:

(a) φ es derivable hasta el orden n en el intervalo $]a, b[$.

(b) Para todo $x \in]a, b[$, el punto $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x))$ pertenece al dominio Ω de definición de la función F.

(c) Para todo $x \in]a,b[$, se verifica que $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$.

Se denomina *curva integral* de una E.D.O. a la representación gráfica de una solución. En ciertas ocasiones, una ecuación del tipo $G(x,y) = 0$ define implícitamente una solución de la E.D.O. en un cierto intervalo, por lo que, en tal caso, esta expresión recibe también el nombre de *solución* de la E.D.O., aun a riesgo de cometer alguna imprecisión. En estos casos, llamaremos a la gráfica de $G(x,y) = 0$ *curva solución*, porque tal curva en su totalidad puede ser la gráfica de varias curvas integrales.

EJEMPLO 1.1.– Por sustitución directa en la E.D.O. $yy' = 1/2$, se comprueba que las funciones $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$ son solución suya en el intervalo $]0, +\infty[$.

Por lo tanto, la ecuación $y^2 = x$ define implícitamente en $]0, +\infty[$ dos soluciones de la E.D.O. La parábola $y^2 = x$ es una curva solución, formada por dos curvas integrales que corresponden a las representaciones gráficas de $y = +\sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$.

Un ejemplo tan sencillo como la E.D.O. $y' = y$, que admite como solución cualquier función de la forma $y = ke^x$ con $k \in \mathbb{R}$, nos sugiere que, usualmente, las E.D.O. tienen soluciones que contienen constantes arbitrarias. En general, una E.D.O. de orden n tiene soluciones que contienen exactamente n constantes arbitrarias esenciales. Precisaremos que las constantes que aparecen en una expresión se denominan *esenciales* si su número no puede reducirse por medio de manipulaciones algebraicas. Hay sin embargo excepciones a la regla general anterior. Así por ejemplo, la E.D.O. $|y'| + |y| = 0$ únicamente admite la solución $y = 0$.

En lo que sigue, vamos a tratar con E.D.O. que están en la primera situación de las descritas, por lo que es conveniente introducir las siguientes definiciones:

Solución general de una E.D.O. de orden n.– Es una familia n-paramétrica de soluciones de la E.D.O.

Solución particular.– Es una solución obtenida a partir de la solución general, asignando valores numéricos a las constantes que figuran en dicha solución general.

Solución singular.– Es una solución de la E.D.O. que no está englobada en la solución general.

EJEMPLOS 1.2.– (a) La E.D.O. $y' = y$ tiene como solución general $y = ke^x$. Con el fin de comprobar que esta solución general describe al conjunto de todas las soluciones de la E.D.O., supongamos que $u(x)$ es una solución. Derivamos la función auxiliar $f(x) = u(x)e^{-x}$, teniendo en cuenta que $u'(x) = u(x)$:

$$f'(x) = u'(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} = u(x)e^{-x} - u(x)e^{-x} = 0.$$

Puesto que f está definida en todo $\mathbb{R}$, concluimos que $f(x) \equiv k$, lo que implica inmediatamente que $u(x) = ke^x$. Así pues, la E.D.O. anterior no tiene soluciones singulares.

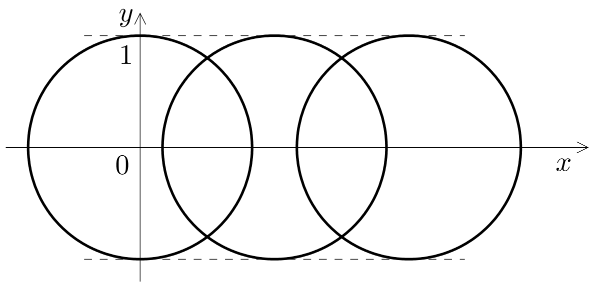

Figura 1.1: Curvas $(x-\lambda)^2 + y^2 = 1$

(b) Consideremos la familia de circunferencias de radio 1, centradas en el eje OX (Figura 1.1).

La ecuación de esta familia es

$$(x-\lambda)^2 + y^2 = 1. \tag{1.2}$$

Con el fin de obtener una E.D.O. cuya solución general sea (1.2), derivamos en la ecuación de la familia respecto de x:

$$2(x-\lambda) + 2yy' = 0.$$

Esta ecuación permite obtener $\lambda = x + yy'$ que, sustituido en (1.2), proporciona para la familia la E.D.O.:

$$y^2\left(1 + y'^2\right) = 1.$$

Esta E.D.O. admite las soluciones singulares $y = 1$, $y = -1$, que son la envolvente de la familia de circunferencias.

Sea una familia n-paramétrica de curvas planas:

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$$

en donde c_i $(i = 1, \ldots, n)$ son n constantes arbitrarias esenciales. Derivando n veces en esta ecuación y efectuando manipulaciones algebraicas, es posible, al menos teóricamente, eliminar las constantes, consiguiéndose una E.D.O. de orden n satisfecha por dicha familia de curvas planas. Es decir, cuando una E.D.O. se ha obtenido por un proceso de eliminación a partir de una familia n-paramétrica de curvas planas, es evidente que dicha E.D.O. admite una solución general que depende de n constantes arbitrarias.

Pero lo que no es evidente (ni cierto), es que cualquier E.D.O. de orden n pueda obtenerse por este procedimiento, a partir de una familia n-paramétrica de curvas planas, así que no se puede asegurar a priori que tal E.D.O. posea una solución general, en el sentido de la definición anterior.

Para obtener una E.D.O. a partir de una familia de curvas dada, es necesario suponer condiciones de continuidad y derivabilidad hasta un cierto orden a las funciones implicadas. Por las mismas razones, en el problema inverso, es decir, en el problema de obtener la solución general a partir de la E.D.O., es necesario exigir a esta alguna regularidad. Desde un punto de vista teórico, el primer problema que se presenta es el de conseguir un conjunto de condiciones, lo más sencillo posible, de modo que pueda asegurarse la existencia de solución que cumpla tales condiciones. En su momento, se establecerá un teorema de existencia y unicidad de solución que asegurará la existencia de solución de la E.D.O. que satisface n condiciones iniciales prefijadas. Por lo tanto, en las condiciones de regularidad de tal teorema, la solución de una E.D.O. de orden n depende de n constantes arbitrarias, lo que justifica la definición anterior de solución general.

1.2. Ecuaciones diferenciales exactas. Factores integrantes

1.2.1. Ecuaciones diferenciales exactas

Consideremos una ecuación diferencial de la forma

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0 \tag{1.3}$$

en la que $y = y(x)$ es la función incógnita, y P, Q son funciones de clase C^1 definidas en un dominio abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Diremos que esta E.D.O. es *exacta* si existe una función escalar $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $(x,y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y) \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

La función U se denomina *función potencial* de la ecuación diferencial.

Teorema 1.2 *La solución general de la ecuación* (1.3) *es*

$$U(x,y) = C \tag{1.4}$$

siendo U la función potencial y C una constante arbitraria.

Precisando, esto significa que la función $y = \varphi(x)$ definida implícitamente por la ecuación (1.4) para cada valor admisible de la constante C, con x perteneciendo a un cierto intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, satisface la E.D.O. (1.3).

Se plantea de manera natural el problema de reconocer si una ecuación diferencial del aspecto (1.3) es exacta o no. En realidad, se trata de buscar un criterio que nos permita asegurar la existencia de un campo escalar U tal que

$$\forall (x,y) \in \Omega \ , \quad \nabla U(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)), \quad \text{donde} \quad \nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y} \right).$$

Un resultado conocido del Análisis Matemático asegura que si Ω es un subconjunto abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$, la función U existe si y solo si

$$\forall (x,y) \in \Omega \ , \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Una vez asegurada la existencia de U, puede procederse a su cálculo por cualquier método de determinación de función potencial de un campo vectorial (P,Q). Un método sencillo es el siguiente:

Puesto que $P = \partial U/\partial x$, será:

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y)$$

en donde la función φ se determina por la condición:

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = Q(x,y).$$

Es evidente que los cálculos pueden también efectuarse de la manera siguiente:

$$U(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \psi(x) \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = P(x,y).$$

1.2.2. Factores integrantes

Llamaremos *factor integrante* de una ecuación (1.3) que no sea exacta, a una función $\mu(x,y)$ definida en Ω y tal que la E.D.O.

$$\mu P + \mu Q y' = 0$$

sea exacta. Suponiendo que Ω sea un subconjunto abierto y simplemente conexo del plano, el factor integrante μ debe satisfacer la condición

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

que da lugar a la E.D.P.:

$$\mu \frac{\partial P}{\partial y} + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

cuya resolución es posible en algunos casos, si se conoce alguna condición suplementaria sobre μ.

Por ejemplo, si se sabe que el factor integrante depende solo de la variable x, $\mu = \mu(x)$, la ecuación anterior se reduce a una E.D.O.:

$$\mu(x) \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \mu'(x) Q(x,y) + \mu(x) \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

o bien

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{(\partial P/\partial y)(x,y) - (\partial Q/\partial x)(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1.5}$$

en donde el segundo miembro dependerá únicamente de la variable x.

El factor integrante será:

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x}{Q}\,dx\right).$$

De lo anterior resulta que un criterio para determinar si una E.D.O. admite un factor integrante dependiente solo de la variable x es que la expresión que figura en el segundo miembro de (1.5) dependa únicamente de dicha variable x.

Análogamente se razona que la E.D.O. admite un factor integrante dependiente de la variable y si solo figura tal variable en la expresión:

$$\frac{(\partial Q/\partial x)(x,y) - (\partial P/\partial y)(x,y)}{P(x,y)}.$$

En tal caso, el factor integrante es:

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y}{P}\,dy\right).$$

Puede probarse que si de una E.D.O. no exacta se conocen dos factores integrantes funcionalmente independientes μ, ν, entonces la solución general de la E.D.O. es:

$$\frac{\mu(x,y)}{\nu(x,y)} = C.$$

NOTA.– Recordamos que dos funciones $f(x,y)$, $g(x,y)$ se dicen *funcionalmente independientes* en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ si, para todo $(x,y) \in \Omega$, su determinante jacobiano verifica

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

1.3. Ecuaciones de variables separables

Son E.D.O. de la forma:

$$X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y)y' = 0$$

en las que suponemos que las funciones X_1, X_2 son de clase C^1 en un intervalo $I_1 \subseteq \mathbb{R}$, las funciones Y_1, Y_2 son de clase C^1 en un intervalo $I_2 \subseteq \mathbb{R}$, y el producto $X_2(x)Y_1(y)$ no se anula en ningún punto de $I_1 \times I_2$.

6.9. Enunciados de problemas

6.1.– Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = x^2y - y \quad ; \quad y' = x - xy^2.$$

Se pide:

1) Puntos de equilibrio y estudio de su estabilidad mediante la linealización. Determinar los puntos de equilibrio cuya estabilidad no puede decidirse linealizando.

2) Determinar una constante a tal que la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + ax^2y^2$$

sea una integral primera del sistema. Dibujar la curva de nivel $f(x, y) = 1$ y representar el campo vectorial asociado al sistema sobre los puntos de esa curva de nivel.

3) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio no resueltos en el primer apartado, tratando de encontrar apropiadas funciones de Liapunov.

4) Determinar y dibujar en el plano el conjunto de puntos (a, b) que, tomados como condición inicial para $t = 0$, determinan semitrayectorias acotadas para $t \geq 0$. Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson, estudiar la posible existencia de órbitas cerradas.

5) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

6.2.– Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = x^2 + y - 1 \quad , \quad y' = -2xy.$$

Se pide:

1) Puntos de equilibrio y estudio de su estabilidad por linealización. Determinar los puntos de equilibrio cuya estabilidad no se puede decidir por linealización.

2) Determinar una constante a para que la función

$$f(x, y) = ax^2y + y^2 - ay$$

resulte ser una integral primera del sistema. Dibujar la curva de nivel $f(x, y) = 0$ y representar el campo vectorial asociado al sistema sobre los puntos de esa curva de nivel.

3) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio no resueltos en el primer apartado, tratando de encontrar adecuadas funciones de Liapunov.

4) Obtener y discutir las consecuencias que en este sistema se deducen de los teoremas de Bendixson, Poincaré y Poincaré-Bendixson.

5) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

6.3.– Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = xy^2 - x \quad , \quad y' = x^2y - y.$$

Se pide:

1) Demostrar que es un sistema gradiente. Calcular la función potencial.

2) Determinar los puntos de equilibrio. Estudiar su estabilidad y su estabilidad asintótica.

3) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el plano de fases.

6.4.– Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + 2ax - 2x^3 = 0$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

1) Escribir por el procedimiento usual un sistema diferencial en las incógnitas $x_1(t)$, $x_2(t)$, equivalente a la ecuación diferencial anterior. Determinar los puntos de equilibrio de dicho sistema.

2) Determinar b de manera que la función

$$f(x_1, x_2) = (x_2 - x_1^2 + b)(x_2 + x_1^2 - b)$$

sea una integral primera del sistema obtenido. Dibujar la curva de nivel 0 de dicha función.

3) Estudiar la estabilidad según Liapunov de los puntos de equilibrio.

4) Discutir la posible existencia y localización de órbitas cerradas, estudiando las consecuencias que pueden deducirse de la aplicación de los teoremas de Bendixson, Poincaré y Poincaré-Bendixson.

5) Hacer un dibujo cuidadoso de las órbitas en el espacio de fases.

NOTA.– Seguramente será necesario distinguir diferentes casos (genéricos y no genéricos) según los valores del parámetro a.

6.5.– La función $f(x, y) = 2x - 4 \operatorname{arc\,tg} x - y^2$ es una integral primera del sistema diferencial autónomo plano

$$x' = x^2 y + y \quad , \quad y' = v(x, y).$$

Determinar los puntos de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad en el sentido de Liapunov.

6.6.– Dos especies en competición, de poblaciones respectivas $x(t)$, $y(t)$ ($x \geq 0, y \geq 0$), disminuyen sus poblaciones de manera que la velocidad de disminución de cada población es proporcional a la propia población con coeficiente de proporcionalidad igual al cuadrado de la población contraria.

Se pide:

1) Formular un modelo matemático de la dinámica de las poblaciones consistente en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

2) Encontrar una integral primera del sistema. Determinar el espacio de fases. Dibujar las órbitas en el espacio de fases. Indicar en el dibujo los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad.

6.10. Soluciones de los problemas

Problema 6.1.–
• 1) Los puntos de equilibrio son las soluciones del sistema no lineal:

$$x^2y - y = 0 \quad , \quad x - xy^2 = 0,$$

es decir, los cinco puntos

$$(0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (-1,1) \quad , \quad (1,-1) \quad , \quad (-1,-1).$$

Sea $\boldsymbol{v}(x,y)$ el campo vectorial asociado al sistema diferencial. Con el fin de estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio por linealización, calculamos la matriz jacobiana de dicho campo vectorial:

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2-1 \\ 1-y^2 & -2xy \end{bmatrix}.$$

La matriz del sistema linealizado en el punto $(0,0)$ es:

$$D\boldsymbol{v}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que tiene los valores propios $\pm i$. Ambos autovalores tienen su parte real nula, por lo que no puede determinarse la estabilidad del punto $(0,0)$ por linealización.

Las matrices de los sistemas linealizados asociados a cada uno de los restantes puntos de equilibrio son:

$$D\boldsymbol{v}(1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad ; \quad D\boldsymbol{v}(1,-1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D\boldsymbol{v}(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad D\boldsymbol{v}(-1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Todas estas matrices tienen los mismos autovalores, ± 2, lo que nos permite concluir que los cuatro puntos de equilibrio son puertos y, por lo tanto, inestables.

• 2) Utilizando la notación $\boldsymbol{v}(x,y) = (v_1(x,y), v_2(x,y))$, la condición que debe satisfacer f para ser una integral primera del sistema es:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial f}{\partial x}v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}v_2 \\ &\equiv (2x + 2axy^2)(x^2y - y) + (2y + 2ax^2y)(x - xy^2) \\ &\equiv 2xy(x^2 - y^2)(1 + a), \end{aligned}$$

de donde se obtiene $a = -1$. Por lo tanto, el sistema diferencial tiene la integral primera

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2y^2.$$

Obsérvese que, para este sistema diferencial, la integral primera podría haberse calculado directamente ya que, a lo largo de las trayectorias, se tiene:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2-1)}\ ,$$

que es una E.D.O. de primer orden de variables separables, cuya solución general es precisamente

$$x^2 + y^2 - x^2y^2 = C.$$

La curva de nivel $f(x,y) = 1$ es

$$1 = x^2 + y^2 - x^2y^2 \quad \Longrightarrow \quad (1-x^2)(1-y^2) = 0,$$

que está formada por las cuatro rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. En la Figura 6.11 se representa esta curva de nivel junto con el campo vectorial definido por el sistema sobre ella.

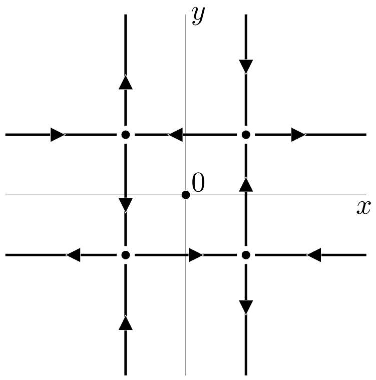

Figura 6.11: Curva de nivel $x^2 + y^2 - x^2y^2 = 1$

• 3) La integral primera f es un candidato a función de Liapunov no estricta para el punto $(0,0)$, que es el único punto de equilibrio cuya estabilidad aún no se ha determinado. Ello se debe a que satisface la condición

$$\mathcal{L}_{\boldsymbol{v}} f(x,y) = 0.$$

Puesto que $f(0,0) = 0$ y el origen es un mínimo relativo estricto para f, concluimos que efectivamente la integral primera satisface las condiciones exigidas como función de Liapunov en $(0,0)$. Por lo tanto, el origen es un punto de equilibrio estable.

No es asintóticamente estable, porque la integral primera no es constante en un entorno del origen.

• 4) A la vista de la gráfica de la curva de nivel 1 de la integral primera, el conjunto pedido es el cuadrado compacto $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$. Este conjunto es también positivamente invariante, puesto que su frontera está formada por órbitas del sistema dinámico.

Como la integral primera no es constante en ningún subconjunto abierto del plano, el sistema no tiene ciclos límite estables o inestables, ni tampoco es posible la afirmación (c) del Teorema 6.30 de Poincaré-Bendixson. Ninguna trayectoria tiende al origen; en efecto, si alguna lo hiciera, como f es continua, debería ser $f \equiv 0$ sobre la trayectoria, lo que contradice el hecho de ser el origen un mínimo relativo *estricto* para f.

En consecuencia, el teorema de Poincaré-Bendixson implica que todas las trayectorias contenidas en el cuadrado $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$ son cerradas.

Dicho cuadrado es la única región del plano de fases que puede contener órbitas cerradas ya que, según el teorema de Poincaré, toda trayectoria cerrada debe contener en su interior un punto de equilibrio. Por lo tanto, no pueden encontrarse rodeando a los puntos de equilibrio distintos del origen, ya que entonces cortarían a las trayectorias contenidas en las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

• 5) El diagrama de fases se representa en la Figura 6.12.

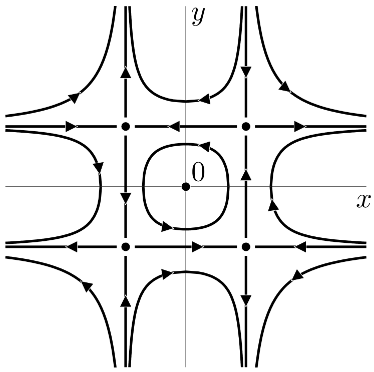

Figura 6.12: Diagrama de fases del sistema $x' = x^2 y - y$, $y' = x - xy^2$

Problema 6.2.–

• 1) Los puntos de equilibrio son las soluciones del sistema

$$x^2 + y - 1 = 0 \quad , \quad xy = 0,$$

es decir,

$$(0,1) \quad , \quad (1,0) \quad , \quad (-1,0).$$

Utilizaremos la notación $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ para representar el campo vectorial asociado al sistema diferencial. Con el fin de estudiar la estabilidad por linealización de los puntos de equilibrio del sistema, calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial:

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -2y & -2x \end{bmatrix}.$$

Las matrices de los respectivos sistemas linealizados en los puntos de equilibrio son:

$$D\boldsymbol{v}(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad D\boldsymbol{v}(1,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad D\boldsymbol{v}(-1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Los sistemas linealizados asociados a los puntos de equilibrio $(1,0)$, $(-1,0)$ tienen los autovalores ± 2, por lo que ambos puntos son puertos, luego son inestables. El sistema linealizado asociado al punto $(0,1)$ tiene ambos autovalores con parte real nula, por lo que su estabilidad no puede decidirse por linealización.

• 2) La función f ha de satisfacer la condición:

$$0 \equiv \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 \equiv 2axy(x^2 + y - 1) + (ax^2 + 2y - a)(-2xy) \equiv 2xy^2(a-2),$$

de la que se obtiene $a = 2$. Por tanto, una integral primera es

$$f(x,y) = 2x^2y + y^2 - 2y.$$

También podía haberse hallado directamente esta integral primera ya que, a lo largo de una trayectoria, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + y - 1} \, ,$$

E.D.O. exacta, que tiene como solución general $2x^2y + y^2 - 2y = C$.

La curva de nivel cero de la integral primera es

$$2x^2y + y^2 - 2y = 0,$$

que se compone de la recta $y = 0$ y la parábola $y = 2 - 2x^2$. El campo vectorial sobre esa curva de nivel queda representado en la Figura 6.13.

• 3) El único punto de equilibrio cuya estabilidad queda por determinar es el punto $(0,1)$. La integral primera satisface todas las condiciones exigidas a una función de Liapunov no estricta, por lo que dicho punto de equilibrio es estable.

No es asintóticamente estable porque la integral primera no es constante en un entorno del punto de equilibrio.

• 4) Según el teorema de Poincaré, las órbitas cerradas rodean a los puntos de equilibrio. Puesto que las trayectorias no pueden cortarse, se deduce del aspecto de la curva de nivel cero de la integral primera que solo puede haber órbitas cerradas en el dominio compacto limitado por la parábola $y = 2 - 2x^2$ y la recta $y = 0$.

El mismo razonamiento del Problema 6.1 permite concluir que, en el interior de ese compacto, todas las trayectorias son cerradas.

• 5) Se representa el diagrama de fases en la Figura 6.13.

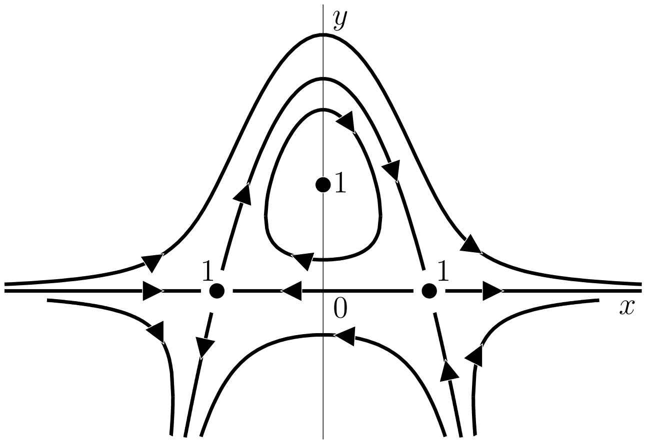

Figura 6.13: Diagrama de fases del sistema $x' = x^2 + y - 1$, $y' = -2xy$

Problema 6.3.–
• 1) Denotaremos por $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ el campo vectorial asociado al sistema diferencial. Este campo vectorial está definido en todo el plano y, puesto que satisface la condición

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial v_2}{\partial x} \ ,$$

es un campo conservativo. Equivalentemente, el sistema diferencial propuesto es un sistema gradiente.

El potencial escalar del campo vectorial se calcula por los métodos descritos en el apartado 1.2.1, resultando en este caso:

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}(x^2y^2 - x^2 - y^2).$$

Se conviene en escribir el sistema diferencial en la forma $(x', y') = -\operatorname{grad} V(x,y)$, por lo que denominaremos en lo que sigue función potencial del sistema diferencial a $V = -U$.

Ya sabemos, por lo tanto, que este sistema no tiene órbitas cerradas.

• 2) Los puntos de equilibrio son solución del sistema:

$$x(y^2 - 1) = 0 \quad , \quad y(x^2 - 1) = 0.$$

Resultan los cinco puntos

$$(0,0) \quad , \quad (1,1) \quad , \quad (1,-1) \quad , \quad (-1,1) \quad , \quad (-1,-1).$$

La matriz jacobiana del campo vectorial es

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 - 1 & 2xy \\ 2xy & x^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Bibliografía

[1] V. I. Arnol'd, *Ordinary Differential Equations,* Springer-Textbook, Springer, Berlin 1992.

[2] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Ordinary Differential Equations,* Chapman and Hall, London 1982.

[3] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems,* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1989.

[4] P. Glendinning, *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations,* Cambridge Texts in Adv. Math., Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[5] J. K. Hale and H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations,* Springer, Berlin 1991.

[6] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations,* Birkhäuser, Boston 1982.

[7] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos,* 3rd ed., Academic Press, Waltham, MA 2013.

[8] J. Hofbauer and K. Sigmund, *The Theory of Evolution and Dynamical Systems,* London Mathematical Society, Student Texts **7**, Cambridge University Press, Cambridge 1992.

[9] J. H. Hubbard and B. H. West, *Differential Equations. A Dynamical Systems Approach,* I, Texts in Appl. Math. **5**, Springer, Berlin 1991.

[10] W. Hurewicz, *Sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias,* Rialp, Madrid 1978.

[11] R. E. O'Malley Jr., *Thinking about Ordinary Differential Equations,* Cambridge Texts in Appl. Math., Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[12] D. Zwillinger, *Handbook of Differential Equations,* Academic Press, Boston 1989.