ECUACIONES DIFERENCIALES

Exámenes resueltos de Grado

INDUSTRIALES
ETSII | UPM

Introducción

Se recogen en esta publicación los exámenes resueltos de Ecuaciones Diferenciales desde que comenzó a impartirse esta asignatura dentro de las titulaciones del llamado plan Bolonia. En algunos cursos académicos hubo exámenes parciales conjuntos para todos los alumnos de la asignatura que se incluyen también en esta colección.

Para facilidad de uso, insertamos seguidamente un índice alfabético. A continuación del nombre de cada tema se enumeran las páginas en que pueden encontrarse problemas relativos a ese tema.

Este cuaderno contiene 42 problemas de examen resueltos.

Índice alfabético

Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales, 35, 47, 75, 87, 99, 111, 115, 125, 141

Ecuaciones diferenciales de primer orden, 3, 5, 17, 27, 29, 39, 43, 53, 87, 111, 125
Ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes variables, 17
Ecuaciones diferenciales lineales de orden n, 15, 37, 137
Estabilidad, 13, 19, 41, 49, 63, 69, 81, 95, 99, 109, 115, 129, 141

Método de separación de variables, 11, 23, 43, 59, 73, 91, 121, 135, 145

Problemas de autovalores y autofunciones, 39, 85, 91, 107, 135, 145

Sistemas diferenciales lineales, 7, 9, 15, 17, 31, 35, 47, 53, 67, 75, 105, 109, 130, 137, 145

Madrid, 27 de junio de 2017

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2011-2012 **PRUEBA PARCIAL (24.10.2011)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula...................... **Grupo** ....

EJERCICIO 1
(2 puntos)

a) Determinar la función $f(x)$ con $f(0) = 1$ para que sea exacta la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x}} + f(x)y^3y' = 0. \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Calcular la solución general de la ecuación diferencial ordinaria obtenida. **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

a) La condición para que la EDO sea exacta es

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)y^3\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{4y^3}{\sqrt{x}} = f'(x)y^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 8\sqrt{x} + K\,.$$

Imponiendo la condición $f(0) = 1$, se obtiene $K = 1$, luego $f(x) = 8\sqrt{x} + 1$.

b) La ecuación diferencial obtenida es

$$\frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x}} + (8\sqrt{x} + 1)y^3y' = 0\,.$$

Buscamos una función potencial $U(x, y)$:

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} = (8\sqrt{x} + 1)y^3 \quad \Rightarrow \quad U(x, y) = (8\sqrt{x} + 1)\frac{y^4}{4} + \phi(x)\,.$$

Derivando respecto de x, resulta

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^4}{\sqrt{x}} + \phi'(x) = \frac{x^3 + y^4}{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \phi'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}} = x^{5/2}\,.$$

Por tanto,

$$U(x, y) = (8\sqrt{x} + 1)\frac{y^4}{4} + x^{5/2}\,.$$

La solución general es $U(x, y) = C$, es decir:

$$\frac{1}{4}(8\sqrt{x} + 1)y^4 + \frac{2}{7}x^{7/2} = C\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2011-2012 **PRUEBA PARCIAL (24.10.2011)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 2
(3 puntos)

Hallar la solución explícita $y(x)$ del siguiente problema de valor inicial, especificando su dominio de definición:

$$y' = y^2 + 2y + a\,, \quad y(0) = b\,,$$

en cada uno de los tres casos siguientes:

1. $a = 5$, $b = -1$. **(1 punto)**

2. $a = 1$, $b = 0$. **(1 punto)**

3. $a = 3/4$, $b = -1$. **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

Se trata de la ecuación diferencial de variables separables:

$$\frac{y'}{y^2+2y+a} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2+2y+a} = x + K\,.$$

Hay que calcular, por tanto, la integral del primer miembro en cada uno de los tres casos dados:

1. Si $a = 5$, se tiene

$$\int \frac{dy}{y^2+2y+5} = \int \frac{dy}{(y+1)^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y+1}{2}\,.$$

Por tanto, la solución general es

$$\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y+1}{2} = x + K \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{2} = \operatorname{tg}(2x+C) \quad \Rightarrow \quad y = 2\operatorname{tg}(2x+C) - 1\,.$$

Imponemos la condición inicial $y(0) = b = -1$:

$$y(0) = 2\operatorname{tg} C - 1 = -1 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = 2\operatorname{tg}(2x) - 1\,.$$

La función está definida para

$$2x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\,.$$

2. Si $a = 1$, tenemos

$$\int \frac{dy}{y^2+2y+1} = \int \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{1}{y+1}\,.$$

La solución general es

$$-\frac{1}{y+1} = x + K \quad \Rightarrow \quad y = -1 - \frac{1}{x+K}\,.$$

Imponiendo la condición inicial $y(0) = b = 0$, obtenemos $K = -1$, y la solución del problema es:

$$y(x) = -1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x}{1-x}\,.$$

Esta función está definida en el conjunto $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Como el primero de los dos intervalos contiene el punto $x = 0$ en el que está dada la condición inicial, el dominio de definición de la solución es $(-\infty, 1)$.

3. Si $a = 3/4$, hallamos las raíces del polinomio resultante:

$$y^2 + 2y + \frac{3}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{2} = \begin{cases} -3/2 \\ -1/2\,. \end{cases}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$\frac{1}{\left(y+\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{3}{2}\right)} = \frac{A}{y+\frac{1}{2}} + \frac{B}{y+\frac{3}{2}} = \frac{1}{y+\frac{1}{2}} - \frac{1}{y+\frac{3}{2}}\,,$$

la integral es:

$$\int \frac{dy}{y^2+2y+3/4} = \int \frac{1}{y+\frac{1}{2}} - \int \frac{1}{y+\frac{3}{2}} = \log\left|y+\frac{1}{2}\right| - \log\left|y+\frac{3}{2}\right| = \log\left|\frac{y+1/2}{y+3/2}\right|\,.$$

La solución general de la EDO es

$$\log\left|\frac{y+1/2}{y+3/2}\right| = x + K \quad \Rightarrow \quad \log\left|\frac{2y+1}{2y+3}\right| = x + K \quad \Rightarrow \quad \frac{2y+1}{2y+3} = Ke^x\,.$$

Con la condición $y(0) = -1$ se obtiene $K = -1$. En consecuencia, la solución es

$$2y + 1 = -e^x(2y+3) \quad \Rightarrow 2y(1+e^x) = -3e^x - 1 \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{3e^x+1}{2(e^x+1)}\,.$$

Su dominio es $(-\infty, +\infty)$.

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2011-2012 **PRUEBA PARCIAL (24.10.2011)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 3
(3 puntos)

Se considera el sistema diferencial lineal de primer orden

$$X'(t) = AX(t)\,, \quad A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Se pide:

1. Expresar la solución general de (1) en términos de los autovalores y autovectores de la matriz A del sistema (1). **(1 punto)**

2. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales (1) tiene soluciones $X(t)$ que satisfacen $\lim_{t\to+\infty} X(t) = (0,0,0)$, y especificar dichas soluciones. **(1 punto)**

3. Calcular los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales (1) admite soluciones periódicas, y especificar dichas soluciones. **(0,5 puntos)**

4. Hallar unas ecuaciones cartesianas para la curva solución periódica $X(t)$ tal que se verifique $X(0) = (-2,3,0)$. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

1. El polinomio característico de A es

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2(2-\lambda) + 2 - \lambda = (2-\lambda)[(a-\lambda)^2+1]\,.$$

Por tanto, los autovalores son $\lambda_1 = 2$, y $\lambda_{2,3} = a \pm i$.

Calculamos los vectores propios asociados.

Si $\lambda_1 = 2$, buscamos un vector columna $\boldsymbol{u}_1 = (x,y,z)^{\mathrm{T}}$ tal que

$$2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x = ax - y \\ 2y = x - ay \\ 2z = 2z\,. \end{array} \right.$$

De aquí se obtiene $x = y = 0$ y, por ejemplo, $z = 1$, por lo que $P_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

Para $\lambda_2 = a + i$, buscamos el vector columna $P_2 = (x,y,z)^{\mathrm{T}}$ tal que

$$(a+i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} (a+i)x = ax - y \\ (a+i)y = x + ay \\ (a+i)z = 2z\,. \end{array} \right.$$

De las dos primeras ecuaciones resulta $y = -ix$ y de la tercera, $z = 0$; por tanto, tomando $x = i$ por ejemplo, tenemos $y = 1$ y $P_2 = (i, 1, 0)^{\mathrm{T}}$. En consecuencia, la solución general es:

$$
\begin{aligned}
X(t) &= C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + + \operatorname{Re}\left[(C_2 + C_3 i)e^{(a+i)t}\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right] \\
&= C_1 e^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \operatorname{Re}\left[(C_2 + C_3 i)e^{at}(\cos t + i \operatorname{sen} t)\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix}-C_2 e^{at}\operatorname{sen} t - C_3 e^{at}\cos t\\ -C_3 e^{at}\operatorname{sen} t + C_2 e^{at}\cos t\\ C_1 e^{2t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

2. El sistema (1) tiene soluciones $X(t)$ que satisfacen $\lim_{t\to+\infty} X(t) = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ para $a < 0$ y constante $C_1 = 0$, es decir:

$$
X(t) = \begin{pmatrix}-C_2 e^{at}\operatorname{sen} t - C_3 e^{at}\cos t\\ -C_3 e^{at}\operatorname{sen} t + C_2 e^{at}\cos t\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \text{para } a < 0.
$$

3. El sistema (1) admite soluciones periódicas para $a = 0$ y constante $C_1 = 0$, es decir:

$$
X(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C_2\operatorname{sen} t - C_3\cos t\\ -C_3\operatorname{sen} t + C_2\cos t\\ 0\end{pmatrix}.
$$

4. Se tiene

$$
X(0) = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-C_3\\C_2\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad C_3 = 2\,, \quad C_2 = 3\,.
$$

Por tanto, resulta $x(t) = -3\operatorname{sen} t - 2\cos t$, $y(t) = -2\operatorname{sen} t + 3\cos t$, de donde se obtiene $x^2 + y^2 = 9 + 4$, es decir, $x^2 + y^2 = 13$, $z = 0$.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula...................... **Grupo** ....

EJERCICIO 4
(2 puntos)

Calcular la solución del problema de valor inicial $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

Lo normal sería comenzar hallando la exponencial e^{tA} pero, en este caso, se da una circunstancia que hace innecesario ese cálculo.

Recordemos que, si una matriz M tiene un autovalor λ con autovector asociado $\boldsymbol{u}$, se tiene $e^{tM}\boldsymbol{u} = e^{\lambda t}\boldsymbol{u}$. Aunque esta relación es bien conocida, damos una demostración aquí.

Se tiene, obviamente,

$$M\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad M^2\boldsymbol{u} = \lambda^2\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad M^k\boldsymbol{u} = \lambda^k\boldsymbol{u}\,.$$

Por tanto,

$$e^{tM}\boldsymbol{u} = \left(I + \frac{1}{1!}\,tM + \frac{1}{2!}\,t^2M^2 + \cdots\right)\boldsymbol{u} = \left(1 + \frac{1}{1!}\,\lambda t + \frac{1}{2!}\,\lambda^2t^2 + \cdots\right)\boldsymbol{u} = e^{\lambda t}\boldsymbol{u}\,.$$

En nuestro caso,

$$A\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{x}_0\,,$$

luego la matriz A tiene el autovalor -1 con autovector asociado $\boldsymbol{x}_0$.

La solución del problema de valor inicial del enunciado es, por la bien conocida fórmula de variación de las constantes:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t e^{(t-u)A}\boldsymbol{b}(u)\,du\,.$$

Calculamos la expresión bajo el signo integral:

$$e^{(t-u)A}\boldsymbol{b}(u) = e^{(t-u)A}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cos u = 2e^{(t-u)A}\boldsymbol{x}_0\cos u = 2e^{-(t-u)}\boldsymbol{x}_0\cos u\,.$$

Se tiene, por tanto,

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-t}\boldsymbol{x}_0 + 2\boldsymbol{x}_0\underbrace{\int_0^t e^{-t+u}\cos u\,du}_{=:\eta(t)}\,.$$

Para calcular la función

$$\eta(t) = e^{-t}\int_0^t e^u\cos u\,du\,,$$

derivamos:

$$\eta'(t) = -e^{-t} \int_0^t e^u \cos u \, du + e^{-t} e^t \cos t = -\eta(t) + \cos t \,,$$

y resulta una EDO lineal de primer orden. La solución general de la EDO homogénea asociada es, obviamente

$$\eta_h(t) = K e^{-t} \,.$$

Una solución particular de la EDO completa es del tipo $y_p(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$. Derivando y sustituyendo en la EDO, resulta:

$$\cos t = \eta_p'(t) + \eta_p(t) = -A \operatorname{sen} t + B \cos t + A \cos t + B \operatorname{sen} t$$

de donde $A = B = 1/2$, y la solución general de la EDO completa es

$$\eta(t) = K e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \,.$$

Haciendo $t = 0$, se obtiene

$$0 = \eta(0) = K + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{1}{2} \,,$$

y la función $\eta(t)$ buscada es

$$\eta(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \,,$$

luego

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-t} \boldsymbol{x}_0 + 2 \boldsymbol{x}_0 \eta(t) = e^{-t} \boldsymbol{x}_0 + (-e^{-t} + \cos t + \operatorname{sen} t) \boldsymbol{x}_0 = (\cos t + \operatorname{sen} t) \boldsymbol{x}_0 \,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2011-2012 **EXAMEN ENERO (11.01.2012)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 1
(4 puntos)

Se considera el siguiente problema de valor inicial y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + e^{-t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{2}$$

Se pide:

1. Obtener los autovalores y autofunciones de $X''(x) = \lambda X(x)$, $X'(0) = X(\pi) = 0$. **(1 punto)**

2. Calcular los coeficientes del desarrollo en serie

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{2n+1}{2} x, \quad 0 < x < \pi. \qquad \textbf{(1 punto)}$$

3. Hallar la solución general de la E.D.O. $T''(t) + a^2 T(t) = be^{-t}$, con $a > 0$ y b constantes. **(1 punto)**

4. Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución del problema (2).**(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

1. Hay tres casos, según el signo de λ:

(a) Si $\lambda = 0$, la EDO es $X''(x) = 0$, cuya solución general es $X(x) = Ax+B$, de donde $X'(x) = A$; condiciones: $X'(0) = 0 = A$; $X(\pi) = 0 = B$. Así pues, la solución única es $X(x) = 0$, que no es autofunción, luego $\lambda = 0$ no es autovalor.

(b) Si $\lambda = k^2 > 0$ con $k > 0$. La EDO es $X'' - k^2 X = 0$, con solución general $X(x) = A \operatorname{sh} kx + B \operatorname{ch} kx$, de donde $X'(x) = Ak \operatorname{ch} kx + Bk \operatorname{sh} kx$. Imponemos las condiciones $X'(0) = 0 = A$, $X(\pi) = 0 = B \operatorname{ch} k\pi$, de donde $B = 0$. En consecuencia, la solución única es $X(x) = 0$, que no es autofunción.

(c) Si $\lambda = -k^2 < 0$ con $k > 0$. La EDO es $X'' + k^2 X = 0$, con solución general $X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$, de donde $X'(x) = -Ak \operatorname{sen} kx + Bk \cos kx$; imponemos las condiciones: $X'(0) = 0 = B$, $X(\pi) = 0 = A \cos k\pi$, luego $\cos k\pi = 0$ de donde $k = (2n+1)/2$.

Por tanto, los autovalores y las autofunciones son, respectivamente,

$$\lambda = -\frac{(2n+1)^2}{4}, \qquad X_n(x) = \cos \frac{2n+1}{2} x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

2. Los coeficientes a_n son:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \frac{2n+1}{2} x \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2} x \right]_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)}. \end{aligned}$$

3. Claramente, la solución general de la EDO es

$$T(t) = k_1 \cos at + k_2 \operatorname{sen} at + \frac{be^{-t}}{a^2+1} \,.$$

4. Ensayando la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,,$$

se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[T_n''(t) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T_n(t) \right] \cos \frac{2n+1}{2}\, x$$
$$= e^{-t} = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)} \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,.$$

Para cada n, se obtiene la EDO:

$$T_n''(t) + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 T_n(t) = \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)} e^{-t} \,.$$

Por el resultado obtenido en **2.**,

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{2n+1}{2}\, t + B_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t + \underbrace{\frac{16(-1)^n}{\pi(2n+1)\,[4+(2n+1)^2]}}_{=:R_n^*}\, e^{-t} \,.$$

Por lo tanto,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n+1}{2}\, t + B_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t + R_n^* e^{-t} \right) \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,.$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{2n+1}{2}\right) A_n \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t + \left(\frac{2n+1}{2}\right) B_n \cos \frac{2n+1}{2}\, t - R_n^* e^{-t} \right] \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,,$$

resulta

$$0 = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2}\, B_n - R_n^* \right) \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,,$$

de donde

$$B_n = \frac{2}{2n+1}\, R_n^* \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \,.$$

Por otra parte,

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + R_n^*) \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,,$$

de donde $A_n = -R_n^*$.

Por tanto, la solución del problema es

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n^* \left[e^{-t} - \cos \frac{2n+1}{2}\, t + \frac{2}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{2n+1}{2}\, t \right] \cos \frac{2n+1}{2}\, x \,,$$

siendo

$$R_n^* = \frac{16(-1)^n}{\pi(2n+1)\,[4+(2n+1)^2]} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \,.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 2
(3 puntos)

Se considera el sistema diferencial autónomo plano

$$\begin{cases} x'(t) = (x^2-1)y \\ y'(t) = -x(x^2-1)\,. \end{cases} \tag{3}$$

Se pide:

1. Determinar una integral primera de (3) y dibujar sus curvas de nivel. **(0,5 puntos)**

2. Dibujar el campo vectorial asociado a (3) en los puntos del eje OX y del eje OY. **(0,5 puntos)**

3. Calcular los puntos de equilibrio de (3) y determinar su estabilidad según Liapunov. **(1 punto)**

4. Determinar, si existen, las órbitas cerradas de (3). **(0,5 puntos)**

5. Hacer un dibujo de las distintas órbitas de (3) en el espacio de fases. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

1. Aplicando la regla de la cadena a lo largo de una trayectoria, se tiene

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{-x(x^2-1)}{(x^2-1)y} = -\frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad yy' = x \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 = C\,.$$

Una integral primera es, por tanto, $f(x,y) = x^2+y^2$, con curvas de nivel $x^2+y^2 = C$, es decir, circunferencias centradas en el origen.

2. En el eje OX, el campo vectorial es

$$(\alpha, 0) \mapsto \big(0, -\alpha(\alpha^2-1)\big)$$

y en el eje OY,

$$(0,\beta) \mapsto (-\beta, 0)\,.$$

El campo vectorial en los ejes puede verse en la Figura 1.

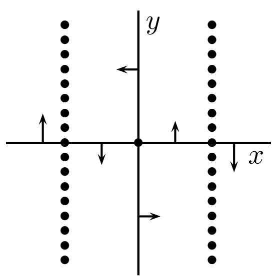


Figura 1: Campo vectorial del sistema $x' = (x^2-1)y$, $y' = -x(x^2-1)$ en los ejes

3. Los puntos de equilibrio son los que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (x^2-1)y = 0 \\ -x(x^2-1) = 0\,, \end{cases}$$

de donde se obtienen el origen $(0,0)$ y todos los puntos de las dos rectas $x = \pm 1$.

4. y **5.** Teniendo en cuenta el campo vectorial sobre los ejes y las curvas de nivel de la integral primera, pueden dibujarse las órbitas del espacio de fases (Figura 2).

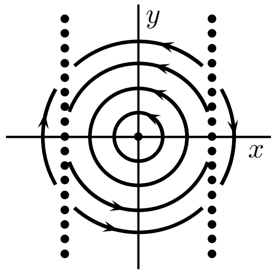


Figura 2: Diagrama de fases del sistema $x' = (x^2-1)y$, $y' = -x(x^2-1)$

Por tanto,

- el punto $(0,0)$ es estable, no asintóticamente estable
- los puntos $(1,\beta)$ con $\beta \geq 0$ son inestables
- los puntos $(1,\beta)$ con $\beta < 0$ son estables, no asintóticamente estables
- los puntos $(-1,\beta)$ con $\beta > 0$ son estables, no asintóticamente estables
- los puntos $(-1,\beta)$ con $\beta \leq 0$ son inestables.

Todas las circunferencias con centro $(0,0)$ y radio menor que 1 son órbitas cerradas del sistema.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 3
(3 puntos)

1. Resolver el problema de valor inicial $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$, con $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. **(1 punto)**

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular e^{tA}. **(1 punto)**

b) Resolver el problema de valor inicial $X'(t) = AX(t) + B(t)$, con $X(0) = X_0$, siendo

$$B(t) = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

1. La ecuacíón característica es $r^2 + r + 1 = 0$, con raíces

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right).$$

Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea, ensayamos $y_p(x) = (ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x$. Sustituyendo en la EDO e identificando coeficientes, resulta

$$y_p(x) = \operatorname{sen} x + (2-x)\cos x\,.$$

La solución general de la EDO completa será

$$y(x) = e^{-x/2}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + B\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\,x\right) + \operatorname{sen} x + (2-x)\cos x\,.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se determinan los coeficientes A y B y se obtiene:

$$y(x) = -2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,x + \operatorname{sen} x + (2-x)\cos x\,.$$

2.a) El polinomio característico de la matriz A es

$$\begin{vmatrix} \lambda+6 & 9 & -9 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \\ 4 & 7 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+2)\,.$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 0$, doble, y $\lambda_1 = -2$, simple. En consecuencia, $e^{tA} \equiv E_1 t + E_2 + E_3 e^{-2t}$. Derivando dos veces esta identidad, obtenemos $Ae^{tA} \equiv E_1 - 2E_3 e^{-2t}$ y $A^2 e^{tA} \equiv 4e_3 E^{-2t}$.

Haciendo $t = 0$, resulta el sistema

$$\begin{cases} I = E_2 + E_3 \\ A = E_1 - 2E_3 \\ A^2 = 4E_3 \end{cases}$$

de donde

$$E_3 = \frac{1}{4}A^2\,, \quad E_1 = A + \frac{1}{2}A^2\,, \quad E_2 = I - \frac{1}{4}A^2\,.$$

Por tanto,

$$e^{tA} = \left(A + \frac{1}{2}A^2\right)t + I - \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}A^2 e^{-2t}\,.$$

Como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \end{pmatrix}\,,$$

se tiene:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} -6 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \\ &= \begin{pmatrix} -6t+1 & -9t & 9t \\ 2t-1+e^{-2t} & 3t-1+2e^{-2t} & -3t+1-e^{-2t} \\ -2t-1+e^{-2t} & -3t-2+2e^{-2t} & 3t+2-e^{-2t} \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

2.b) La solución del problema de valor inicial es

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{tA}\left[X_0 + \int_0^t e^{-uA}B(u)\,du\right] = \\ &= \int_0^t e^{(t-u)A}B(u)\,du \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} -6(t-u)+1 & -9(t-u) & 9(t-u) \\ 2(t-u)-1+e^{-2(t-u)} & 3(t-u)-1+2e^{-2(t-u)} & -3(t-u)+1-e^{-2(t-u)} \\ -2(t-u)-1+e^{-2(t-u)} & -3(t-u)-2+2e^{-2(t-u)} & 3(t-u)-e^{-2(t-u)}+2 \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \frac{1}{u^2+1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} du \\ &= \begin{pmatrix} (6t-1)\operatorname{arc\,tg} t - 3\log(t^2+1) \\ (1-2t)\operatorname{arc\,tg} t + \log(t^2+1) \\ (1+2t)\operatorname{arc\,tg} t - \log(t^2+1) \end{pmatrix}\,. \end{aligned}$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2011-2012	**EXAMEN JUNIO (27.06.2012)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula.......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 1
(3 puntos)

1.a) Determinar una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(0)=1$ tal que la ecuación diferencial

$$yf(xy)\cos 2x - 2f(xy)\,\text{sen}\,2x + 2x + [xf(xy)\cos 2x - 3]\,y' = 0$$

sea exacta. **(0,5 puntos)**

b) Hallar la solución general de la EDO obtenida en el apartado **a).** **(0,5 puntos)**

2. Hallar la solución $y(x)$ de la ecuación diferencial

$$x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = \frac{1}{x}$$

que satisfaga las condiciones

$$y(1) = 1\,, \qquad \int_1^e y(x)\,dx = \frac{3}{2}\,.$$ **(1 punto)**

3. Calcular la solución del problema de valor inicial $X'(t) = AX(t) + B(t)$, $X(0) = X_0$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\,, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\,t \end{pmatrix}\,, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$ **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

1.a) La ecuación

$$\underbrace{yf(xy)\cos 2x - 2f(xy)\,\text{sen}\,2x + 2x}_{=:A(x,y)} + \underbrace{[xf(xy)\cos 2x - 3]}_{=:B(x,y)}\,y' = 0$$

está definida en $\mathbb{R}^2$. Por tanto, es exacta si y solo si se verifica la igualdad de "derivadas cruzadas"

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad f'(xy) = f(xy)\,,$$

luego f debe verificar $f'(u) = f(u)$ con $f(0) = 1$, lo que implica $f(u) = e^u$. Por tanto, $f(xy) = e^{xy}$.

1.b) Buscamos una función potencial

$$F(x,y) = \int (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy + \varphi(x) = e^{xy}\cos 2x - 3y + \varphi(x)\,.$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x + \varphi'(x)\\ &= ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\,\text{sen}\,2x + 2x\,,\end{aligned}$$

de donde $\varphi'(x) = 2x$, luego $\varphi(x) = x^2$. Por tanto, la solución general de la EDO es

$$e^{xy}\cos 2x - 3y + x^2 = C\,.$$

2. Siendo una EDO de Euler, hacemos el cambio de variable independiente $x = e^t$, obteniéndose

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}\,.$$

La ecuación característica de la EDO homogénea asociada es $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, con raíces $\lambda = -1, -2$, por tanto la solución general de la EDO homogénea es

$$y_h(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t}\,.$$

Ensayamos una solución particular de la EDO completa en la forma $y_p(t) = Ate^{-t}$, obteniendo $A = 1$, luego la solución general de la EDO completa es

$$y(t) = k_1 e^{-2t} + k_2 e^{-t} + te^{-t}\,.$$

Deshaciendo el cambio,

$$y(x) = \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{x} + \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)\,.$$

Imponemos las condiciones

$$\begin{aligned} y(1) &= k_1 + k_2 = 1 \\ \int_1^e y(x)\,dx &= \left[-\frac{k_1}{x} + k_2\log x + \frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^e = k_1\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \frac{1}{2} + k_2 = \frac{3}{2}\,, \end{aligned}$$

de donde $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, y la solución del problema es

$$y(x) = \frac{1}{x}\,(\log x + 1)\,.$$

3. El polinomio característico de la matriz A es $|A - \lambda I| = \lambda^2 + 1$, con raíces $\lambda = \pm i$, luego todos los elementos de la matriz exponencial e^{tA} son combinación lineal de $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, es decir,

$$e^{tA} \equiv M\cos t + N\operatorname{sen} t\,.$$

Derivando esta identidad se obtiene

$$Ae^{tA} \equiv -M\operatorname{sen} t + N\cos t\,,$$

de donde, haciendo $t = 0$, resulta $M = I$, $N = A$. Por tanto,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t + 2\operatorname{sen} t & 5\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t - 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$e^{-uA}B(u) = \begin{pmatrix} \cos u - 2\operatorname{sen} u & -5\operatorname{sen} u \\ \operatorname{sen} u & \cos u + 2\operatorname{sen} u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\operatorname{sen}^2 u \\ \cos u\operatorname{sen} u + 2\operatorname{sen}^2 u \end{pmatrix}.$$

Como

$$\int_0^t \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t\,,$$

se tiene

$$\int_0^t e^{-uA}B(u)\,du = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} t\cos t \\ t + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen} t\cos t \end{pmatrix},$$

y la solución del problema es

$$X(t) = e^{tA}\left[X_0 + \int_0^t e^{-uA}B(u)\,du\right] = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\,t\cos t + \frac{5}{2}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{2}\,t\operatorname{sen} t + t\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 2
(4 puntos)

Se considera el sistema diferencial autónomo plano dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = ax - x^3 + xy^2 \\ y' = -y - y^3 - x^2 y \,. \end{cases} \tag{4}$$

Se pide:

1. Para $a \neq 0$, determinar los puntos de equilibrio de (4) y decidir su estabilidad según Lyapunov. **(1 punto)**

2. Para $a \neq 0$, estudiar la posible existencia de órbitas cerradas de (4). **(0,5 puntos)**

3. Para $a \neq 0$, dibujar las distintas órbitas de (4) en el espacio de fases. **(1 punto)**

4. Para $a = 0$, dibujar el campo vectorial asociado a (4) en los puntos de la frontera del cuadrado $Q = [0, R] \times [0, R]$, con $R > 0$. Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson, dibujar la órbita que corresponde a cualquier condición inicial $(x_0, y_0) \in Q$. **(1 punto)**

5. Para $a = 0$, determinar los puntos de equilibrio de (4) y decidir su estabilidad según Lyapunov. Estudiar la posible existencia de órbitas cerradas. Dibujar las distintas órbitas de (4) en el espacio de fases. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

1. Los puntos de equilibrio son los que verifican el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x(a - x^2 + y^2) = 0 \\ -y(1 + y^2 + x^2) = 0 \,, \end{cases}$$

es decir, si $a > 0$, los puntos de equilibrio son $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{a}\,, 0)$ y, si $a < 0$, el único punto de equilibrio es $(0, 0)$.

La matriz jacobiana del campo vectorial asociado al sistema (4) es

$$D\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{pmatrix} a - 3x^2 + y^2 & 2xy \\ -2xy & -1 - 3y^2 - x^2 \end{pmatrix} .$$

En particular,

$$D\boldsymbol{v}(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ,$$

luego, si $a > 0$, el origen es inestable (un puerto) y, si $a < 0$, el origen es asintóticamente estable (un sumidero). Por otra parte,

$$D\boldsymbol{v}\left(\pm\sqrt{a}\,, 0\right) = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -1 - a \end{pmatrix}$$

y los puntos $(\pm\sqrt{a}\,, 0)$ son asintóticamente estables (sumideros).

2. El campo vectorial en el eje OX es

$$\boldsymbol{v}(\alpha, 0) = \big(\alpha(a - \alpha^2), 0\big)$$

y en el eje OY,

$$\boldsymbol{v}(0, \beta) = (0, -\beta - \beta^3)\,,$$

es decir, ambos ejes están formados por trayectorias. El teorema de Poincaré implica por tanto que no existen órbitas cerradas.

3. El diagrama de fases para $a \neq 0$ se muestra en la Figura 3.

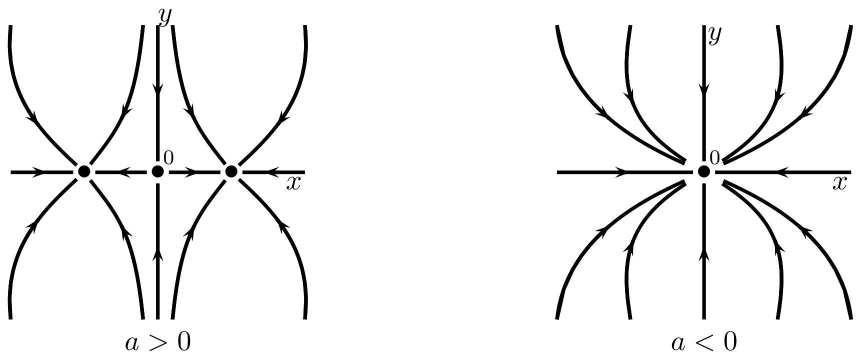


Figura 3: Diagrama de fases del sistema $x' = ax - x^3 + xy^2$, $y' = -y - y^3 - x^2y$

4. y **5.** Si $a = 0$, el sistema (4) se reduce a

$$\begin{cases} x' = -x^3 + xy^2 \\ y' = -y - y^3 - x^2 y\,. \end{cases}$$

El único punto de equilibrio es $(0, 0)$ y, como la matriz $D\boldsymbol{v}(0, 0)$ tiene un autovalor nulo, la estabilidad del origen no se puede decidir por el método de linealización.

Calculamos el campo vectorial en la frontera del cuadrado $[0, R] \times [0, R]$. Si $x = R$,

$$\boldsymbol{v}(R, \beta) = \big(R(-R^2 + \beta^2), -\beta - \beta^3 - \beta R^2\big)$$

con primera componente negativa si $\beta < R$ y segunda negativa en todo caso. En el vértice (R, R) se tiene

$$\boldsymbol{v}(R, R) = (0, -R - 2R^3)$$

y en el segmento horizontal $y = R$,

$$\boldsymbol{v}(\alpha, R) = \big(\alpha(R^2 - \alpha^2), -R - R^3 - \alpha^2 R\big)$$

con segunda componente negativa. El campo vectorial en los lados del cuadrado puede verse en la Figura 4.

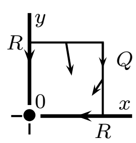


Figura 4: Campo asociado al sistema $x' = -x^3 + xy^2$, $y' = -y - y^3 - x^2y$ en $[0, R] \times [0, R]$

Si $(x_0, y_0) \in Q$, el Teorema de Poincaré-Bendixson asegura que la órbita que empieza en ese punto tiende hacia $(0, 0)$ cuando $t \to +\infty$. En consecuencia, el origen es asintóticamente estable.

El espacio de fases para $a = 0$ puede verse en la Figura 5.

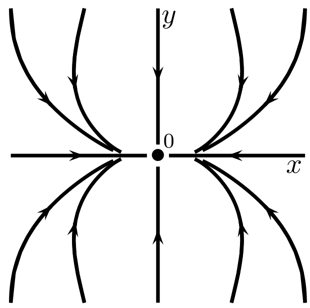


Figura 5: Diagrama de fases del sistema $x' = -x^3 + xy^2$, $y' = -y - y^3 - x^2y$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 3
(3 puntos)

Se considera el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 2\cos 4x\,, & 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,, \quad t > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3\,, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0\,, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Se pide:

1. Determinar los autovalores y autofunciones del problema homogéneo asociado. **(0,5 puntos)**

2. Hallar la solución general de cada una de las EDO

$$T_n''(t) + 2T_n'(t) + 4n^2 T_n(t) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$ **(0,25 puntos)**

3. Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución del problema (5).**(2 puntos)**

4. Representar gráficamente la función

$$u_\infty(x) = \lim_{t\to+\infty} u(x,t)\,,$$

siendo $u(x,t)$ la solución de (5). **(0,25 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

1. Buscamos soluciones de la EDP homogénea asociada con las condiciones de frontera del tipo $u(x,t) = X(x)T(t)$, obteniendo el problema de autovalores y autofunciones:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X'(0) = X'(\pi/2) = 0\,, \end{cases}$$

con soluciones:

$$\lambda_n = -4n^2\,, \qquad X_n(x) = \cos 2nx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

2. La ecuación característica de la EDO es $\lambda^2 + 2\lambda + 4n^2 = 0$. Si $n = 0$, las raíces son $\lambda_0 = 0, -2$ y la solución general de la EDO es

$$T_0(t) = A_0 + B_0 e^{-2t}\,.$$

Si $n \neq 0$, las raíces son $\lambda_n = -1 \pm i\sqrt{4n^2-1}$, y la solución general de la EDO es

$$T_n(t) = e^{-t}\left(A_n \cos\sqrt{4n^2-1}\,t + B_n \operatorname{sen}\sqrt{4n^2-1}\,t\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

3. Ensayamos la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)\cos 2nx\,.$$

Sustituyéndola en la EDP, resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''(t)+2T_n'(t)+4n^2T_n(t)\right]\cos 2nx = 2\cos 4x\,.$$

Para $n\neq 2$, se obtiene la EDO $T_n''(t)+2T_n'(t)+4n^2T_n(t)=0$, con solución general

$$\begin{aligned}
&T_0(t)=A_0+B_0e^{-2t}\quad (n=0)\\
&T_n(t)=e^{-t}\left(A_n\cos\sqrt{4n^2-1}t+B_n\operatorname{sen}\sqrt{4n^2-1}t\right)\qquad (n\neq 0,2)\,.
\end{aligned}$$

Para $n=2$, se tiene la EDO $T_2''(t)+2T_2'(t)+16T_2(t)=2$, con solución general

$$T_2(t)=e^{-t}\left(A_2\cos\sqrt{15}t+B_2\operatorname{sen}\sqrt{15}t\right)+\frac{1}{8}\,.$$

Sustituyendo estas funciones $T_n(t)$ en la solución $u(x,t)$, resulta

$$u(x,t)=A_0+B_0e^{-2t}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-t}\left(A_n\cos\sqrt{4n^2-1}t+B_n\operatorname{sen}\sqrt{4n^2-1}t\right)\cos 2nx+\frac{1}{8}\cos 4x\,.$$

Imponiendo la condición inicial para u, se tiene:

$$u(x,0)=A_0+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos 2nx+\frac{1}{8}\cos 4x=3\,,$$

de donde

$$A_0+B_0=3\,,\quad A_2+\frac{1}{8}=0\,,\quad A_n=0\quad (n\neq 0,2)\,.$$

Por lo tanto,

$$u(x,t)=3-B_0+B_0e^{-2t}+\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{4n^2-1}t\cos 2nx+\frac{1}{8}\left(1-e^{-t}\cos\sqrt{15}t\right)\cos 4x\,.$$

Derivando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=&-2B_0e^{-2t}+\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-t}\left[-\operatorname{sen}\sqrt{4n^2-1}t+\sqrt{4n^2-1}\cos\sqrt{4n^2-1}t\right]\cos 2nx\\
&+\frac{1}{8}\,e^{-t}\left(\cos\sqrt{15}t+\sqrt{15}\operatorname{sen}\sqrt{15}t\right)\cos 4x\,.
\end{aligned}$$

Imponemos la condición inicial para la derivada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-2B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{4n^2-1}\cos 2nx+\frac{1}{8}\cos 4x=0\,,$$

de donde

$$B_0=0\,,\quad B_2=-\frac{1}{8\sqrt{15}}\,,\quad B_n=0\quad (n\neq 0,2)\,.$$

Luego la solución obtenida es

$$u(x,t)=3-\frac{1}{8\sqrt{15}}\,e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{15}t\cos 4x+\frac{1}{8}\,\left(1-e^{-t}\cos\sqrt{15}t\right)\cos 4x\,.$$

4. Se tiene

$$u_\infty(x)=\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=3+\frac{1}{8}\cos 4x\,,$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 6.

La función u_∞ es periódica de periodo $\pi/2$.

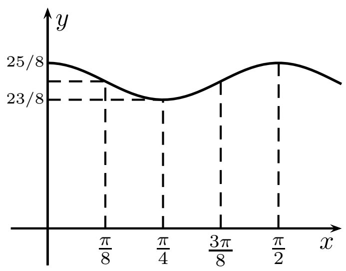


Figura 6: Gráfica de la función $u_\infty(x) = 3 + (\cos 4x)/8$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula...................... **Grupo** ....

EJERCICIO 1
(2 puntos)

Se considera la EDO de primer orden

$$\frac{2x}{y} + 3f\left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^3}{y^3}\right) y' \,. \tag{6}$$

Se pide:

a) Determinar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(0) = 0$ para que la EDO (6) sea exacta.**(0,5 puntos)**

b) Para la función f encontrada en **a),** hallar la solución de (6) tal que $y(1) = 2$. **(0,5 puntos)**

c) Para $f(u) = u^3/3$, hallar la solución de la EDO (6) tal que $y(1) = 2$. **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)
a) Escribimos la ecuación en la forma

$$\underbrace{\frac{2x}{y} + 3f\left(\frac{x}{y}\right)}_{=:A} \underbrace{- \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^3}{y^3}\right)}_{=:B} y' = 0 \,.$$

Si la ecuación es exacta, cumple la “igualdad de derivadas cruzadas”:

$$-\frac{2x}{y^2} + 3f'\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{6x^2}{y^3} \,,$$

de donde

$$f'\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{2x}{y} \,.$$

Se tiene por tanto $f'(u) = 2u$ con $f(0) = 0$, luego $f(u) = u^2$.

b) La EDO es en este caso

$$\frac{2x}{y} + \frac{3x^2}{y^2} - \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^3}{y^3}\right) y' = 0 \,.$$

Buscamos una función potencial $F(x, y)$ que debe cumplir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{y} + \frac{3x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} + \varphi(y) \,.$$

Por otra parte,

$$-\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x^3}{y^3} = \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} - \frac{2x^3}{y^3} + \varphi'(y) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(y) = 0 \,.$$

Por tanto,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2}$$

y la solución general de la EDO es

$$\frac{x^2}{y} + \frac{x^3}{y^2} = C\,.$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 2$, resulta $C = 3/4$, de donde obtenemos la solución

$$4x^2(x + y) = 3y^2\,.$$

La función y puede despejarse explícitamente, y se obtiene

$$y(x) = \frac{2}{3}\left(x^2 + x\sqrt{x^2 + 3x}\right)\,.$$

Esta solución es válida en $(0, \infty)$, que es el intervalo máximo de definición de la solución.

c) Si $f(u) = u^3/3$, la EDO es

$$\frac{2x}{y} + \frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{2x^3}{y^3}\right) y'\,,$$

que es una EDO homogénea.

Hacemos el cambio de función incógnita $y(x) \mapsto u(x)$ siendo $y = ux$, luego $y' = u'x + u$. Sustituyendo en la EDO, resulta

$$(u + 2)u'x = (u - 1)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{u + 2}{(u - 1)^2}\, u' = \frac{1}{x}\,.$$

Se tiene

$$\int \frac{u + 2}{(u - 1)^2}\, du = \int \left(\frac{1}{u - 1} + \frac{3}{(u - 1)^2}\right) du = \log|u - 1| - \frac{3}{u - 1}\,.$$

Integrando el segundo miembro respecto de x e igualando,

$$\log|u - 1| - \frac{3}{u - 1} = \log|x| + \log|K|\,,$$

de donde

$$(u - 1)e^{-3/(u-1)} = Kx\,.$$

Deshaciendo el cambio,

$$y - x = Kx^2 e^{3x/(y-x)}\,.$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 2$, resulta $K = e^{-3}$, y la solución del problema es

$$y - x = x^2 e^{3(2x-y)/(y-x)}\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2012-2013 **PRUEBA PARCIAL (5.11.2012)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 2
(3 puntos)

Para cada $p \in \mathbb{R}$, se considera la EDO de primer orden

$$2xy' + 4y = (x^2+3)y^p \, .$$

Determinar su solución para los siguientes valores del número real p y las condiciones dadas en cada caso:

1) $p = 0, \quad y(0) < +\infty.$ **(1 punto)**

2) $p = 1, \quad y(1) = 1.$ **(1 punto)**

3) $p = -1, \quad y(0) < +\infty.$ **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)
1) Si $p = 0$, la ecuación resultante es lineal de primer orden:

$$2xy' + 4y = x^2 + 3 \, .$$

Resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$2xy' + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \log|y| = -2\log|x| + \log|K| \, ,$$

con solución general

$$y_0(x) = \frac{K}{x^2} \, .$$

Por el método de variación de las constantes, ensayamos una solución particular de la ecuación completa en la forma

$$y_p(x) := \frac{K(x)}{x^2} \, .$$

Después de sustituir en la EDO, resulta

$$K'(x) = \frac{x^3+3x}{2} \quad \Rightarrow \quad K(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{3x^2}{4} \quad \Rightarrow \quad y_p(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{3}{4} \, .$$

La solución general de la EDO será

$$y(x) = \frac{K}{x^2} + \frac{x^2}{8} + \frac{3}{4} \, .$$

Para que sea $y(0) < +\infty$, se debe tener $K = 0$, y la solución del problema es

$$y(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{3}{4} \, .$$

2) Para $p=1$, resulta la EDO

$$2xy' + 4y = (x^2+3)y \quad \Rightarrow \quad 2xy' = (x^2-1)y \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{x^2-1}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\,,$$

que es separable y la resolvemos como tal:

$$\log|y| = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\log|x| + \log|K|\,.$$

Tomando exponenciales y elevando a potencia 4, resulta la solución general

$$y^4x^2 = Ce^{x^2}\,.$$

De la condición $y(1)=1$, se obtiene $C=1/e$, y la solución del problema es

$$y^4x^2 = e^{x^2-1}\,.$$

3) Si $p=-1$, la EDO resultante es

$$2xy' + 4y = (x^2+3)y^{-1}\,,$$

que es de Bernoulli. La escribimos en la forma

$$2xyy' + 4y^2 = x^2+3\,,$$

y hacemos el cambio de función incógnita $u := y^2$, de donde $u' = 2yy'$. Sustituyendo en la ecuación, se obtiene la EDO lineal de primer orden

$$xu' + 4u = x^2+3\,.$$

Resolvemos la EDO homogénea asociada

$$xu' + 4u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = -\frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad \log|u| = -4\log|x| + \log|K|\,,$$

con solución general

$$u_0(x) = \frac{K}{x^4}\,.$$

Por el método de variación de las constantes, ensayamos la solución particular

$$u_p(x) := \frac{K(x)}{x^4}\,,$$

y se obtiene, después de sustituir en la EDO,

$$K'(x) = x^5 + 3x^3 \quad \Rightarrow \quad K(x) = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^4}{4} \quad \Rightarrow \quad u_p(x) = \frac{x^2}{6} + \frac{3}{4}\,.$$

La solución general de la EDO en $u(x)$ es, por tanto,

$$u(x) = \frac{K}{x^4} + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{4}\,,$$

y la solución general de la EDO en $y(x)$ será

$$y^2 = \frac{K}{x^4} + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{4}\,.$$

Imponiendo la condición $y(0) < +\infty$, resulta $K=0$, y la solución del problema es

$$y^2 = \frac{x^2}{6} + \frac{3}{4}\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2012-2013	**PRUEBA PARCIAL (5.11.2012)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 3
(2 puntos)

Hallar la solución del problema de valor inicial $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$, $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja)

Primer método.

El sistema diferencial se puede desacoplar. La primera ecuación es

$$x' = x + e^t, \quad \text{con} \quad x(0) = 0,$$

con solución $x(t) = te^t$.

Sustituyendo en las otras dos ecuaciones, se obtiene

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} t-1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A^*} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \underbrace{e^t \begin{pmatrix} 3t-1 \\ 2t+1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{b}^*(t)}.$$

El polinomio característico de A^* es $|A^* - \lambda I| = (1-\lambda)^2 + 4$, con raíces $\lambda = 1 \pm 2i$. La matriz exponencial es de la forma

$$e^{tA^*} = Me^t \cos 2t + Ne^t \operatorname{sen} 2t,$$

de donde se obtiene tras cálculos rutinarios,

$$e^{tA^*} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Calculamos el producto

$$e^{-sA^*}\boldsymbol{b}^*(t) = \begin{pmatrix} (3s-1)\cos 2s & (2s+1)\operatorname{sen} 2s \\ (1-3s)\operatorname{sen} 2s & (2s+1)\cos 2s \end{pmatrix}.$$

Integrando,

$$\int_0^t e^{-sA^*}\boldsymbol{b}^*(t)\, ds = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{3}{2} t \operatorname{sen} 2t - t\cos 2t \\ -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + t \operatorname{sen} 2t + \frac{3}{2} t \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Tras los cálculos habituales, obtenemos

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1/4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{3}{2} t \operatorname{sen} 2t - t\cos 2t \\ -\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + t \operatorname{sen} 2t + \frac{3}{2} t \cos 2t \end{pmatrix} \right] = e^t \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - t \\ \frac{3t}{2} \end{pmatrix}.$$

Segundo método.

El polinomio característico de la matriz A es $|A-\lambda I| = (1-\lambda)\,[(1-\lambda)^2+4]$, con raíces $\lambda = 1$ y $\lambda = 1 \pm 2i$.

La matriz exponencial es de la forma

$$e^{tA} = Me^t + Ne^t\cos 2t + Pe^t \operatorname{sen} 2t\,,$$

de donde, con los cálculos habituales, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} &M+N = I\\ &M+N+2P = A\\ &M-3N+4P = A^2 \end{aligned}$$

De aquí resulta:

$$M = I-N\,,\quad P = \frac{1}{2}(A-I)\,,\quad N = -\frac{1}{4}(A-I)^2\,,$$

y

$$e^{tA} = e^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ -1+\cos 2t+\operatorname{sen} 2t & \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t\\ 1-\cos 2t+\operatorname{sen} 2t & \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{pmatrix}.$$

Calculamos

$$e^{-sA}\boldsymbol{b}(s) = \begin{pmatrix} 1\\ -1+s\cos 2s\\ 1-s\operatorname{sen} 2s \end{pmatrix}\,,$$

de donde

$$\int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)\,ds = \begin{pmatrix} t\\ -t+\dfrac{1}{2}t\operatorname{sen} 2t+\dfrac{1}{4}\cos 2t-\dfrac{1}{4}\\ t+\dfrac{1}{2}t\cos 2t-\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$$

y la solución del problema es

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{tA}\left[\boldsymbol{x}_0+\int_0^t e^{-sA}\boldsymbol{b}(s)\,ds\right] = e^t\begin{pmatrix} t\\ \dfrac{1}{4}-t\\ \dfrac{3t}{2} \end{pmatrix}.$$

Tercer método.

Al principio del segundo método hemos calculado los autovalores de la matriz A que son $\lambda = 1$ y $\lambda = 1 \pm 2i$.

Los dos primeros métodos son los usuales. En este caso tienen el inconveniente de que ambos son laboriosos debido a los autovalores complejos de la matriz A. Ofrecemos ahora una tercera opción que no requiere el cálculo de ninguna integral ni de la exponencial de ninguna matriz.

Como todos los autovalores de A tienen parte real igual a 1, la matriz e^{tA} contiene el factor e^t en el sentido de que todos sus elementos son combinación lineal de las funciones e^t, $e^t\cos 2t$ y $e^t\operatorname{sen} 2t$. Como el término independiente $\boldsymbol{b}(t)$ también contiene el factor e^t, la solución del problema contiene igualmente el factor e^t. Por eso, el cambio de función incógnita $\boldsymbol{x}(t) \mapsto \boldsymbol{y}(t)$ siendo $\boldsymbol{x}(t) = e^t\boldsymbol{y}(t)$ va a simplificar mucho el problema haciendo desaparecer de su enunciado la función e^t.

Sustituyendo en el sistema diferencial, se tiene

$$e^t \boldsymbol{y}(t) + e^t \boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t) = Ae^t \boldsymbol{y}(t) + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dividiendo el primer y último miembro por e^t, y despejando, resulta:

$$\boldsymbol{y}'(t) = (A - I)\boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

con $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$.

La primera ecuación del sistema obtenido es $y_1'(t) = 1$. Integrando e imponiendo la condición inicial $y_1(0) = 0$, resulta $y_1(t) = t$.

Sustituyendo en la segunda y tercera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= 2y_1(t) - 2y_3(t) + t - 1 = -2y_3(t) + 3t - 1 \\ y_3'(t) &= 2y_1(t) + 2y_2(t) + 1 = 2y_2(t) + 2t + 1 \,. \end{aligned}$$

Derivando la primera de estas ecuaciones y sustituyendo en la segunda, se obtiene

$$\begin{aligned} & y_2''(t) = -2y_3'(t) + 3 = -4y_2(t) - 4t + 1 \\ & \Rightarrow \quad y_2''(t) + 4y_2(t) = -4t + 1 \,. \end{aligned}$$

Obviamente, una solución "particular" de esta ecuación es $y_2(t) = -t + 1/4$ que "casualmente" verifica la condición inicial $y_2(0) = 1/4$.

Despejando $y_3(t)$ en la primera ecuación, se tiene

$$2y_3(t) = -y_2'(t) + 3t - 1 = 3t \quad \Rightarrow \quad y_3(t) = \frac{3t}{2}$$

que también cumple la condición inicial $y_3(0) = 0$.

Por tanto, la solución del problema en $\boldsymbol{y}(t)$ es

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t + 1/4 \\ 3t/2 \end{pmatrix} ,$$

de donde

$$\boldsymbol{x}(t) = e^t \boldsymbol{y}(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ -t + 1/4 \\ 3t/2 \end{pmatrix} .$$

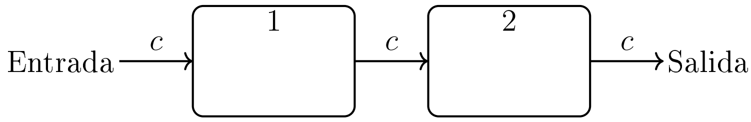
Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2012-2013 **PRUEBA PARCIAL (5.11.2012)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 4
(3 puntos)

Dos depósitos conectados con el exterior, según se indica en la figura, están llenos de una disolución salina que circula por el sistema con un caudal constante $c > 0$.



Se inyecta desde el exterior una disolución salina de concentración constante $a > 0$. Sea $x_i(t)$ la concentración de sal en el depósito i en el instante de tiempo t, para $i = 1, 2$. Un sencillo razonamiento sobre conservación de la masa, suponiendo ambos depósitos de volumen igual a la unidad, proporciona el siguiente sistema diferencial para la evolución temporal de las concentraciones:

$$\begin{cases} x_1'(t) = ca - cx_1(t) \\ x_2'(t) = cx_1(t) - cx_2(t) \end{cases} \tag{7}$$

Se pide:

1) Calcular la solución de (7) tal que $x_1(0) = b_1 > 0$, $x_2(0) = b_2 > 0$. **(0,75 puntos)**

2) Hallar el comportamiento a largo plazo de dicha solución. **(0,25 puntos)**

Con el fin de eliminar la sal de ambos depósitos, se inyecta agua pura desde el exterior. Todo lo que sigue se refiere a esta situación.

3) Hallar el valor que ha de tomar a en este caso y escribir la correspondiente solución de (7). **(0,25 puntos)**

4) Si $b_1 > b_2 > 0$, hallar el instante de tiempo en el que la concentración de sal en el depósito 2 alcanza su valor máximo y obtener dicho valor máximo. **(0,5 puntos)**

5) Representar gráficamente la evolución de la concentración $x_2(t)$ en el depósito 2 para $t > 0$. **(0,75 puntos)**

6) Si inicialmente el depósito 1 contiene una disolución salina de 50 gramos de sal por unidad de volumen, calcular el tiempo que se tarda en reducir a un 1 gramo de sal por unidad de volumen la concentración de sal en dicho depósito 1. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra más)

1) La primera ecuación del sistema es

$$x_1' = ca - cx_1 \quad \Rightarrow \quad x_1' + cx_1 = ca \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = k_1 e^{-ct} + a\,.$$

Imponiendo la condición inicial, determinamos la constante k_1:

$$b_1 = x_1(0) = k_1 + a \quad \Rightarrow \quad k_1 = b_1 - a\,,$$

de donde obtenemos la solución

$$x_1(t) = a + (b_1 - a)e^{-ct}\,.$$

En cuanto a la segunda ecuación:

$$\begin{aligned}
& x_2' = cx_1 - cx_2 = ac + c(b_1 - a)e^{-ct} - cx_2 \\
\Rightarrow\quad & x_2' + cx_2 = ac + c(b_1 - a)e^{-ct} \\
\Rightarrow\quad & x_2'e^{ct} + cx_2e^{ct} = ace^{ct} + c(b_1 - a) \\
\Rightarrow\quad & \frac{d}{dt}\left(x_2e^{ct}\right) = ace^{ct} + c(b_1 - a) \\
\Rightarrow\quad & x_2e^{ct} = ae^{ct} + c(b_1 - a)t + k_2 \\
\Rightarrow\quad & x_2(t) = a + c(b_1 - a)te^{-ct} + k_2e^{-ct}\,.
\end{aligned}$$

Imponiendo la condición inicial:

$$b_2 = x_2(0) = a + k_2 \quad\Rightarrow\quad k_2 = b_2 - a\,,$$

y obtenemos la solución

$$x_2(t) = a + \left[(b_2 - a) + c(b_1 - a)t\right]e^{-ct}\,.$$

2)

$$\lim_{t\to+\infty}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}\,.$$

3) Para que los límites anteriores sean nulos, debe ser $a = 0$. En este caso, la solución del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1e^{-ct} \\ (b_2 + cb_1t)e^{-ct} \end{pmatrix}\,.$$

4) Calculamos el máximo de $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}
& x_2'(t) = \left[cb_1 - c(b_2 + cb_1t)\right]e^{-ct} = 0 \\
\Rightarrow\quad & b_1 = b_2 + cb_1t_{\mathrm{m}} \quad\Rightarrow\quad t_{\mathrm{m}} = \frac{b_1 - b_2}{cb_1} > 0\,,
\end{aligned}$$

y el valor máximo es

$$x_{2_{\mathrm{m}}} = \left(b_2 + cb_1\,\frac{b_1 - b_2}{cb_1}\right)e^{-\frac{b_1 - b_2}{b_1}} = b_1e^{\frac{b_2 - b_1}{b_1}}\,.$$

5) La evolución de la concentración $x_2(t)$ en el depósito 2 puede verse en la Figura 7.

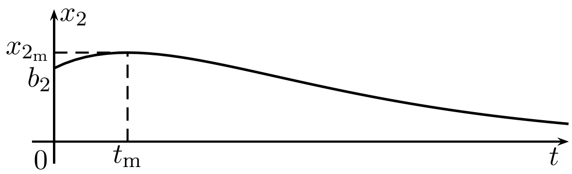


Figura 7: Concentración de sal en el depósito 2

6) Si $b_1 = 50$, hemos de calcular t tal que $1 = x_1(t) = 50e^{-ct}$, de donde

$$e^{-ct} = \frac{1}{50} \quad\Rightarrow\quad -ct = \log\frac{1}{50} = -\log 50 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{1}{c}\log 50\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2012-2013	**EXAMEN GLOBAL (17.1.2013)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 1
(4 puntos)

a) Hallar la solución general de la EDO: **(1 punto)**

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = \operatorname{sh} 2t + t.$$

b) Hallar la solución general de la EDO: **(1 punto)**

$$x'''(t) + 5x''(t) + 6x'(t) = \operatorname{sh} 2t + t.$$

c) Hallar la solución general de la EDO: **(1 punto)**

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = \frac{e^{-4t}}{e^{-2t}+1}.$$

d) Calcular los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la solución $x(t)$ del siguiente problema de valores iniciales satisface que $x(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0$: **(1 punto)**

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0 \quad ; \quad x(0) = 1 \ , \ x'(0) = a.$$

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra más)

a) La ecuación característica es $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, con raíces $\lambda = -2, -3$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$x_h(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t}\,.$$

Una solución particular de la ecuación completa será del tipo

$$x_p(t) = Ae^{2t} + Bte^{-2t} + Ct + D\,.$$

Sustituyendo en la EDO y operando, resulta:

$$A = \frac{1}{40}\,, \quad B = -\frac{1}{2}\,, \quad C = \frac{1}{6}\,, \quad D = -\frac{5}{36}\,,$$

y la solución general de la EDO es

$$x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{40}\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,te^{-2t} + \frac{t}{6} - \frac{5}{36}\,.$$

b) Efectuando el cambio de función incógnita $y := x'$, se obtiene del apartado anterior:

$$y(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t} + \frac{1}{40}\,e^{2t} - \frac{1}{2}\,te^{-2t} + \frac{t}{6} - \frac{5}{36}\,.$$

Integrando, resulta la solución general:

$$x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t} + k_3 + \frac{1}{80}\, e^{2t} + \frac{1}{4}\, t e^{-2t} + \frac{t^2}{12} - \frac{5t}{36}\,.$$

c) Buscamos una solución particular de la EDO no homogénea utilizando el método de variación de las constantes:

$$x_p(t) = k_1(t) e^{-3t} + k_2(t) e^{-2t}\,.$$

Como es bien sabido, las funciones $k_1(t)$ y $k_2(t)$ deben cumplir las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k_1'(t) e^{-3t} + k_2'(t) e^{-2t} & = & 0 \\ -3k_1'(t) e^{-3t} - 2k_2'(t) e^{-2t} & = & \dfrac{e^{-4t}}{e^{-2t}+1} \end{array} \right.$$

de donde se obtiene inmediatamente:

$$k_1'(t) = \frac{-e^{-t}}{e^{-2t}+1}\,, \qquad k_2'(t) = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}+1}\,,$$

luego

$$k_1(t) = \operatorname{arc\,tg}\left(e^{-t}\right)\,, \qquad k_2(t) = -\frac{1}{2}\log\left(1+e^{-2t}\right)\,,$$

y la solución general de la EDO es

$$x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t} + e^{-3t} \operatorname{arc\,tg}\left(e^{-t}\right) - \frac{1}{2}\, e^{-2t} \log\left(1+e^{-2t}\right)\,.$$

d) La solución general de la EDO es, como hemos visto,

$$x(t) = k_1 e^{-3t} + k_2 e^{-2t}\,.$$

Imponiendo la condición $x(0) = 1$, se obtiene $k_1 + k_2 = 1$. Por otra parte,

$$x'(t) = -3k_1 e^{-3t} - 2k_2 e^{-2t} = -3k_1 e^{-3t} - 2(1-k_1) e^{-2t}\,.$$

Imponiendo la condición $x'(0) = a$, resulta $k_1 = -a-2$, de donde $k_2 = 1 - k_1 = a+3$. Por tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$x(t) = -(a+2) e^{-3t} + (a+3) e^{-2t} = e^{-2t}\left[(a+3) - (a+2)e^{-t}\right]\,.$$

La fnción $g(t) := (a+3) - (a+2)e^{-t}$ es continua con $g(0) = 1$ y es claramente creciente o decreciente, dependiendo del valor de a. Por tanto, será $g(t) \geq 0$ si y solo si no existe ningún $t^* > 0$ tal que $g(t^*) = 0$, equivalentemente

$$e^{t^*} = \frac{a+2}{a+3} \quad \Leftrightarrow \quad t^* = \log\left(\frac{a+2}{a+3}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{a+3}\right)\,.$$

Será $t^* > 0$ si y solo si $1/(a+3) < 0$, es decir, $a < -3$. Por lo tanto, los valores de a pedidos son

$$a \in [-3, +\infty)\,.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 2
(2 puntos)

a) Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial, especificando su intervalo máximo de definición:

$$xyy' = y^2 - x^4 \quad ; \quad y(1) = 2.$$

Indicación: $y = ux$. **(1 punto)**

b) Hallar los autovalores y autofunciones del siguiente problema de contorno: **(1 punto)**

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad ; \quad X(0) = X'(0) \quad ; \quad X(\pi) = X'(\pi)$$

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) Consideramos la ecuación definida en el primer cuadrante $x, y > 0$, de modo que sea posible escribirla en forma normal, es decir,

$$y' = \frac{y^2 - x^4}{xy}\,. \tag{8}$$

Hacemos el cambio de función incógnita $u := y/x$, de donde $y' = u + xu'$. Sustituyendo en la EDO:

$$x^2u(xu' + u) = x^2u^2 - x^4 \quad \Rightarrow \quad uu' = -x\,.$$

Integrando esta ecuación separable:

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{k}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{x^2} = -x^2 + k \quad \Rightarrow \quad y^2 = kx^2 - x^4 = x^2(k - x^2)\,.$$

Imponiendo la condición inicial $y(1) = 2$, resulta $k = 5$. La solución del PVI es, pues (Figura 8):

$$y(x) = x\sqrt{5 - x^2}\,.$$

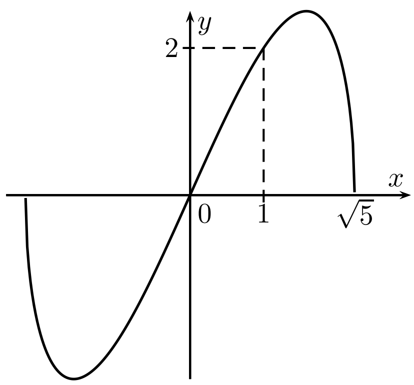


Figura 8: Función $y = x\sqrt{5 - x^2}$

Si consideramos la ecuación en forma normal (8), la solución del PVI está definida en el intervalo $\left(0, \sqrt{5}\right)$. Nótese que y está definida en $x = \sqrt{5}$ pero no tiene derivada (lateral) en ese punto ya que

$$y'(x) = \sqrt{5 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \sqrt{5}_-} y'(x) = -\infty\,.$$

Sin embargo, si consideramos la ecuación original del enunciado, la solución hallada satisface el PVI en todo el intervalo $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$.

b) Veamos si puede ser $\lambda > 0$. La solución general de la EDO sería

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}\,.$$

Imponemos las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} X(0) = X'(0) \quad &\Rightarrow \quad c_1 + c_2 = c_1\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} \\ X(\pi) = X'(\pi) \quad &\Rightarrow \quad c_1 e^{\pi\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-\pi\sqrt{\lambda}} = c_1\sqrt{\lambda} e^{\pi\sqrt{\lambda}} + c_2\sqrt{\lambda} e^{-\pi\sqrt{\lambda}}\,, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \sqrt{\lambda}\right) c_1 + \left(1 + \sqrt{\lambda}\right) c_2 = 0 \\ \left(1 - \sqrt{\lambda}\right) e^{\pi\sqrt{\lambda}} c_1 + \left(1 + \sqrt{\lambda}\right) e^{-\pi\sqrt{\lambda}} c_2 = 0\,. \end{array} \right.$$

Este sistema tiene solución $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ si y solo si el determinante de la matriz del sistema

$$\Delta = \left(1 - \sqrt{\lambda}\right)\left(1 + \sqrt{\lambda}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\pi\sqrt{\lambda}} & e^{-\pi\sqrt{\lambda}} \end{vmatrix}$$

es nulo, es decir, $\lambda = 1$, lo cual implica $c_2 = 0$.

Por tanto, $\lambda = 1$ es autovalor, con autofunción asociada $X(x) = e^x$.

Veamos si puede ser $\lambda = 0$. La solución general de la EDO sería entonces $X(x) = c_1 x + c_2$. Imponiendo las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} X(0) = X'(0) \quad &\Rightarrow \quad c_1 = c_2 \\ X(\pi) = X'(\pi) \quad &\Rightarrow \quad c_1\pi + c_2 = c_1\,, \end{aligned}$$

de donde $c_1 = c_2 = 0$ y se tiene $X(x) \equiv 0$, que no es autofunción.

Veamos si puede ser $\lambda < 0$. Escribimos $\lambda = -|\lambda|$. La solución general de la EDO es

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{|\lambda|}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}x\,.$$

Imponemos las condiciones de frontera:

$$X(0) = X'(0) \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2\sqrt{|\lambda|}\,.$$

De la condición $X(\pi) = X'(\pi)$ se obtiene

$$c_1 \cos\pi\sqrt{|\lambda|} + c_2 \operatorname{sen}\pi\sqrt{|\lambda|} = -c_1\sqrt{|\lambda|}\operatorname{sen}\pi\sqrt{|\lambda|} + c_2\sqrt{|\lambda|}\cos\pi\sqrt{|\lambda|}\,.$$

Por tanto, $\operatorname{sen}\pi\sqrt{|\lambda|} = 0$, luego $\sqrt{|\lambda|} = n$ para $n = 1, 2, \ldots$. Entonces son autovalores $\lambda_n = -n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y autofunciones

$$X_n(x) = n\cos nx + \operatorname{sen} nx\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2012-2013	**EXAMEN GLOBAL (17.1.2013)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 3
(4 puntos)

La función $f(x,y) = xy(x+y-1)$ es una integral primera del sistema diferencial autónomo plano:

$$\begin{cases} x'(t) &= x^2 + 2xy - x \\ y'(t) &= v(x,y) \end{cases} \tag{9}$$

a) Determinar la función $v(x,y)$, definida en $\mathbb{R}^2$. **(0,5 puntos)**

b) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio del sistema (9). Una casilla errónea invalida las respuestas de toda la fila. **(1 punto)**

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$(0,1)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$(1,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$(1/3,1/3)$	No	No	No	No	No	Sí	No

c) Dibujar la curva de nivel cero de f y dibujar el campo vectorial asociado al sistema (9) en los puntos de la curva de nivel. **(0,5 puntos)**

d) Decidir razonadamente la existencia o no de órbitas cerradas para el sistema (9).**(0,5 puntos)**

e) Dibujar las distintas órbitas del sistema (9) en el espacio de fases. **(1 punto)**

f) Decidir la prolongabilidad en el tiempo hacia el futuro de las soluciones del sistema (9) $(x(t),y(t))$ con $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$ tales que $x_0 + y_0 = 1$. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) La función f es una integral primera si cumple

$$\begin{aligned} &\langle \operatorname{grad} f(x,y), \boldsymbol{v}(x,y)\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad &(2xy + y^2 - y)(x^2 + 2xy - x) + (x^2 + 2xy - x)v(x,y) = 0 \\ \Rightarrow \quad &v(x,y) = -2xy - y^2 + y\,. \end{aligned}$$

b) Los puntos de equilibrio son los que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x(x + 2y - 1) = 0 \\ y(1 - y - 2x) = 0\,, \end{cases}$$

es decir, los puntos

$$(0,0)\,, \quad (0,1)\,, \quad (1,0)\,, \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

La matriz jacobiana del campo $\boldsymbol{v}$ es

$$D\boldsymbol{v}((x,y)) = \begin{pmatrix} 2x+2y-1 & 2x \\ -2y & 1-2y-2x \end{pmatrix}.$$

De ella se deduce inmediatamente que los puntos $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$ son puertos, por tanto inestables.

La integral primera $f(x,y)$ es también una función de Lyapunov para el punto $(1/3, 1/3)$ que será estable.

d) Aplicando los teoremas de Poincaré y de Poincaré-Bendixson se demuestra la existencia de órbitas cerradas que se indican en la Figura 9.

c) y **e)** El diagrama de fases puede verse en la Figura 9.

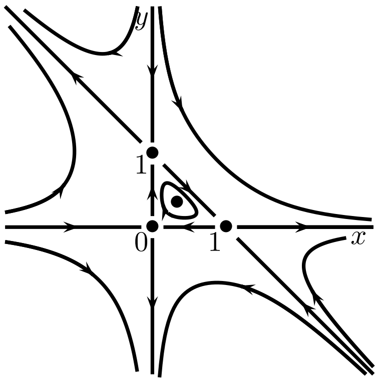


Figura 9: Diagrama de fases del sistema $x' = x^2 - 2xy - x$, $y' = -2xy - y^2 + y$

f) La recta $x + y = 1$ está formada por trayectorias. Por tanto, la solución que empieza en un punto de la recta se mantiene en la misma recta, y verifica $x(t)+y(t) \equiv 1$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema, obtenemos

$$x' = x - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x(1-x)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) x' = 1\,.$$

Integrando la ecuación separable, resulta

$$\log\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + k$$

que, imponiendo la condición inicial $x(0) = x_0$, da la solución del problema

$$x(t) = \frac{x_0 e^t}{1 + x_0(e^t - 1)}\,.$$

La soluión $x(t)$ es prolongable indefinidamente si y solo si el denominador se anula en algún instante t^*, es decir si existe $t^* > 0$ tal que

$$1 + x_0\left(e^{t^*} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^* = \log\left(1 - \frac{1}{x_0}\right),$$

y este t^* es mayor que cero si y solo si $x_0 < 0$. Por tanto, la solución $(x(t), y(t))$ está definida en $[0, +\infty)$ si y solo si $x_0 \geq 0$. Si $x_0 < 0$, la solución está definida en $[0, t^*)$.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 1
(3 puntos)

1) Hallar la solución $y(x)$ del problema de valor inicial, especificando su dominio de definición:

$$y'(x)(x^2-1)+xy(x)=1 \quad ; \quad y(a)=b$$

en cada uno de los siguientes casos:

1.1) $a=0, \quad b=2$ **(1 punto)**

1.2) $a=2, \quad b=\dfrac{\log(2+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ **(1 punto)**

2) Se considera el siguiente problema de valor inicial y de contorno:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+u(x,t) \quad , \quad 0<x<10 \ , \ t>0 \\ u(0,t) & = & u(10,t)=0 \quad , \quad t>0 \\ u(x,0) & = & 3\text{sen}\,2\pi x-7\text{sen}\,4\pi x \quad , \quad 0<x<10 \end{array}\right. \tag{10}$$

2.1) Plantear el problema de autovalores asociado y hallar sus correspondientes autovalores y autofunciones. **(0,5 puntos)**

2.2) Hallar la solución del problema (10) aplicando el método de separación de variables. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra más)

1) La ecuación es lineal de primer orden. Resolvemos primero la ecuación homogénea asociada:

$$(x^2-1)y'=-xy \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y}=\frac{x}{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad \log|y|=-\frac{1}{2}\log|1-x^2|+K$$
$$\Rightarrow \quad y_H(x)=\frac{K}{\sqrt{|1-x^2|}} \ .$$

1.1) La condición inicial es $y(0)=2$. Se busca la solución para $|x|<1$, por tanto $|1-x^2|=1-x^2$, y la solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H(x)=\frac{K}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Por el método de variación de las constantes, una solución particular de la ecuación completa es

$$y_P(x)=\frac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}} \ .$$

Sustituyendo en la ecuación, se tiene

$$(x^2-1)\,\frac{K'(x)\sqrt{1-x^2}-K(x)\,\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}+x\,\frac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}=1$$

de donde

$$-K'(x)\sqrt{1-x^2}=1 \quad\Rightarrow\quad K'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad K(x)=-\operatorname{arc\,sen} x\,,$$

y la solución general de la ecuación es

$$y(x)=\frac{K-\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Imponiendo la condición inicial, resulta $2=y(0)=K$, y la solución del problema es

$$y(x)=\frac{2-\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\quad |x|<1\,.$$

1.2) La condición inicial es

$$y(2)=\frac{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\,.$$

Se busca la solución para $x>1$. La solución general de la ecuación homogénea es

$$y_H(x)=\frac{K}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Una solución particular de la ecuación completa es

$$y_P(x)=\frac{K(x)}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Sustituyendo en la ecuación, resulta

$$(x^2-1)\,\frac{K'(x)\sqrt{x^2-1}-K(x)\,\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}+x\,\frac{K(x)}{\sqrt{x^2-1}}=1$$

de donde

$$K'(x)\sqrt{x^2-1}=1 \quad\Rightarrow\quad K'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad\Rightarrow\quad K(x)=\operatorname{arg\,ch} x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\,,$$

y la solución general de la ecuación es

$$y(x)=\frac{K+\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

Imponiendo la condición inicial, resulta

$$\frac{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}=y(2)=\frac{K+\log\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}} \quad\Rightarrow\quad K=0\,,$$

y la solución del problema es

$$y(x)=\frac{\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}\,,\quad x>1\,.$$

2)

Apartado **2.1)** Ensayamos $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + X(x)T(t)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} \ ,$$

de donde obtenemos el problema de autovalores

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(10) = 0 \,. \end{cases}$$

La ecuación característica de la ecuación diferencial es $r^2 = \lambda$. Se comprueba inmediatamente que no hay autovalores $\lambda \geq 0$. Supongamos $\lambda < 0$. Entonces, $\lambda = -|\lambda|$, de donde $r = \pm i\sqrt{|\lambda|}$ y la solución general de la ecuación diferencial es

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{|\lambda|}x + C_2 \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda|}x \,.$$

Imponiendo las condiciones de frontera:

$$0 = X(0) = C_1$$
$$0 = X(10) = C_2 \operatorname{sen} 10\sqrt{|\lambda|} \quad \Rightarrow \quad 10\sqrt{|\lambda|} = \pi n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi n}{10} \,.$$

Por tanto, los autovalores son

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{100} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

y las autofunciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{10} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \,.$$

2.2) Sustituyendo los λ_n en la ecuación en $T(t)$, se obtiene:

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} - 1 = -\frac{\pi^2 n^2}{100} \quad \Rightarrow \quad T_n'(t) = \left[1 - \frac{\pi^2 n^2}{100}\right] T_n(t) \,,$$

con solución general

$$T_n(t) = A_n e^{\left(1 - \frac{\pi^2 n^2}{100}\right)t} \,.$$

Ensayamos una solución del problema en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\left(1 - \frac{\pi^2 n^2}{100}\right)t} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{10} \ .$$

Imponemos la condición inicial:

$$3 \operatorname{sen} 2\pi x - 7 \operatorname{sen} 4\pi x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{10} \ ,$$

de donde

$$A_{20} = 3 \ , \quad A_{40} = -7 \ , \quad A_n = 0 \quad (n \neq 20, 40)$$

y la solución del problema es

$$u(x,t) = 3e^{(1-4\pi^2)t} \operatorname{sen} 2\pi x - 7e^{(1-16\pi^2)t} \operatorname{sen} 4\pi x \,.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 2
(4 puntos)

Una posible fórmula (cuya demostración no se pide) para expresar la solución general del sistema diferencial lineal no homogéneo

$$X'(t) = AX(t) + B \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} -(a+b) & a \\ b & -(a+b) \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \; , \; a,b,c,d > 0 \qquad (11)$$

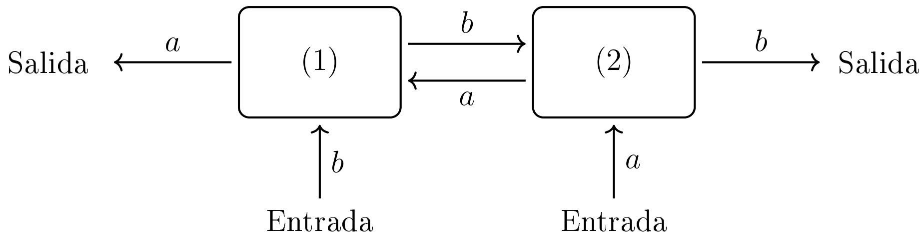
es $X(t) = X_H(t) + K$, en donde $X_H(t)$ es la solución general del sistema diferencial homogéneo $X'(t) = AX(t)$ y $K \in \mathbb{R}^2$ es un vector constante que es una solución particular del sistema (11).

a) Calcular los autovalores de A y especificar su signo, según los posibles valores de $a, b > 0$. Determinar los valores de $a, b > 0$ para los cuales A es invertible. Determinar los valores de $a, b > 0$ para los cuales A es diagonalizable. **(1 punto)**

b) Expresar K en términos de A y B. **(0,5 puntos)**

c) Si $X(t)$ es la solución general del sistema (11), expresar $\lim_{t\to+\infty} X(t)$ en términos de A y B, determinando previamente los valores de $a, b > 0$ para los cuales dicho límite existe. **(1 punto)**

Dos depósitos conectados entre sí y con el exterior están llenos de una disolución salina que circula por el sistema con caudales constantes $a, b > 0$ según se indica en la figura.



Se inyecta desde el exterior en cada depósito una solución salina de concentración constante q. Sea $x_i(t)$ la concentración de sal en el depósito i en el instante t $(i = 1, 2)$. Un sencillo razonamiento sobre conservación de la masa, suponiendo ambos depósitos de volumen igual a la unidad, proporciona el siguiente sistema diferencial para la evolución temporal de las concentraciones:

$$\begin{cases} x_1'(t) &=& bq - (a+b)x_1(t) + ax_2(t) \\ x_2'(t) &=& aq + bx_1(t) - (a+b)x_2(t) \end{cases}$$

d) Calcular la concentración a largo plazo en ambos depósitos. **(1,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) Calculamos los autovalores de A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(a+b) - \lambda & a \\ b & -(a+b) - \lambda \end{vmatrix} = [(a+b) + \lambda]^2 - ab = 0$$

$$[(a+b) + \lambda]^2 = ab \quad \Rightarrow \quad a + b + \lambda = \pm\sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = -a - b + \sqrt{ab} \\ \lambda_2 = -a - b - \sqrt{ab}\,. \end{cases}$$

Es claro que $\lambda_2 < 0$ para todos $a, b > 0$. Para ver el signo de λ_1, observamos que

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab > ab \quad \Rightarrow \quad a + b > \sqrt{ab} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 < 0\,.$$

Por tanto, $|A| \neq 0$ para todos $a, b > 0$ y existe siempre la matriz inversa A^{-1}. Además, es evidente que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y por lo tanto A es diagonalizable para todos $a, b > 0$.

b) Buscamos la solución particular constante $X_P(t) = K$ que existe según afirma el enunciado. Sustituyendo en el sistema (11), resulta:

$$0 = X_P'(t) = AK + B \quad \Rightarrow \quad AK = -B \quad \Rightarrow \quad K = -A^{-1}B\,.$$

c) La solución general del sistema (11) es

$$X(t) = X_H(t) + K = k_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{u}_1 + k_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{u}_2 + K\,,$$

luego

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = K = -A^{-1}B\,.$$

d) Escrito en forma matricial, el sistema para la evolución de las concentraciones es

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a+b) & a \\ b & -(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}\,,$$

que coincide con el sistema (11) cuando $c = qb$ y $d = qa$. Puesto que

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + ab} \begin{pmatrix} -(a+b) & -a \\ -b & -(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\,,$$

un sencillo cálculo proporciona el comportamiento buscado a largo plazo:

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = -A^{-1}B = q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Esto significa que, a largo plazo, se igualan a q las concentraciones en ambos depósitos.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 3
(3 puntos)

Se considera el siguiente sistema diferencial autónomo plano, dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(a-4+2y)-a \\ y'(t) &= y(a+1-x)-2a \end{cases} \tag{12}$$

1) Calcular $b \in \mathbb{R}$ para que $P^* = (1, b)$ sea un punto de equilibrio del sistema (12). **(0,5 puntos)**

2) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el equilibrio P^* satisface la propiedad indicada en la cabecera. **(1 punto)**

	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
Valores de a							

3) Para $a = 0$, hallar los puntos de equilibrio del sistema (12) y decidir su estabilidad según Lyapunov. **(1 punto)**

4) Para $a = 0$ dibujar el campo vectorial asociado al sistema (12) sobre los ejes coordenados y esbozar un dibujo de las órbitas de (12) en el espacio de fases que sea compatible con la información obtenida. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

1) Los puntos de equilibrio del sistema son los que cumplen

$$\begin{cases} x(a-4+2y)-a=0 \\ y(a+1-x)-2a=0\,. \end{cases}$$

Buscamos puntos de equilibrio de la forma $P^* = (1, b)$. Hacemos, por tanto, $x = 1$ y se obtiene inmediatamente $b = 2$. Es decir, el punto $P^* = (1, 2)$ es de equilibrio para el sistema (12) para todo valor de $a \in \mathbb{R}$.

2) Para decidir la estabilidad de P^*, calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial $\boldsymbol{v}$ asociado al sistema (12):

$$D\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{pmatrix} a-4+2y & 2x \\ -y & a+1-x \end{pmatrix}.$$

En particular,

$$D\boldsymbol{v}(1, 2) = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix},$$

con determinante igual a $a^2 + 4$, positivo para todo $a \in \mathbb{R}$, y traza igual a $2a$. Por tanto,

$$\begin{aligned} a > 0 \quad &\Rightarrow \quad P^* \text{ es una fuente (inestable)} \\ a < 0 \quad &\Rightarrow \quad P^* \text{ es un sumidero (asintóticamente estable)}\,. \end{aligned}$$

Queda por clasificar el punto P^* cuando $a = 0$. En este caso, el sistema (12) se reduce a

$$\begin{cases} x' = x(-4 + 2y) \\ y' = y(1 - x)\,. \end{cases} \tag{13}$$

Buscamos una integral primera del sistema:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y(1-x)}{x(-4+2y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{2y-4}{y}\,y' = \frac{1-x}{x}$$
$$\Rightarrow \quad 2y - 4\log|y| = \log|x| - x + C\,,$$

luego una integral primera es

$$f(x,y) := 2y + x - 4\log|y| - \log|x|\,,$$

que no es global sino local (la consideramos definida en el cuadrante positivo $x, y > 0$).

El punto $(1,2)$ anula las primeras derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 1 - \frac{1}{x}\bigg|_{(1,2)} = 0\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 2 - \frac{4}{y}\bigg|_{(1,2)} = 0\,.$$

La matriz hessiana en el punto es

$$Hf(1,2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

Por tanto, P^* es un mínimo relativo estricto para f, luego f es una función de Lyapunov para P^* que será un punto de equilibrio estable. Ninguna trayectoria puede tender a P^* para $a = 0$ porque f (integral primera) sería constante a lo largo de la trayectoria y, por continuidad, su valor en P^* coincidiría con el valor de f a lo largo de la trayectoria, lo cual contradice el hecho de que P^* es un mínimo local estricto de f. Por tanto, para $a = 0$, P^* es un punto de equilibrio estable no asintóticamente estable.

El cuadro que se pide es, por consiguiente:

	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
Valores de a	$a \neq 0$	$a > 0$	Ningún a	$a < 0$	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$

3) Cuando $a = 0$, el sistema es (13) y sus puntos de equilibrio son los que satisfacen:

$$\begin{cases} x(-4 + 2y) = 0 \\ y(1 - x) = 0\,, \end{cases}$$

con soluciones $(0,0)$ y $(1,2)$. Este último es el punto P^* ya considerado. Para determinar la estabilidad del origen, calculamos la matriz jacobiana

$$D\boldsymbol{v}(0,0) = \begin{pmatrix} -4 + 2y & 2x \\ -y & 1 - x \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,,$$

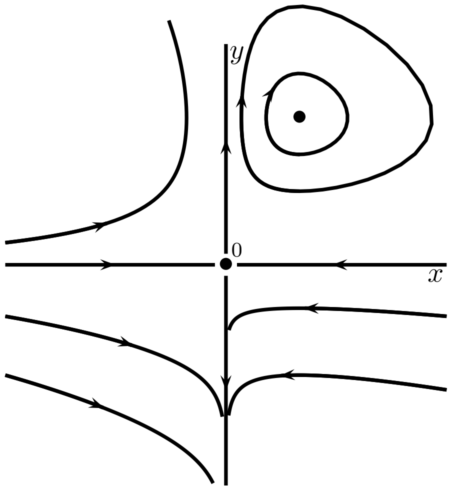


Figura 10: Diagrama de fases del sistema $x' = x(-4+2y)$, $y' = y(1-x)$

luego el punto $(0,0)$ es un puerto (inestable por tanto).

4) Para $a = 0$, el campo vectorial en el eje OX es $\boldsymbol{v}(\alpha, 0) = (-4\alpha, 0)$. En el eje OY, $\boldsymbol{v}(0,\beta) = (0,\beta)$.

El diagrama de fases puede verse en la Figura 10.

Nota. Es posible probar que todas las trayectorias contenidas en el primer cuadrante $x, y > 0$ son cerradas, aunque este hecho no se pide en el enunciado.

Consideremos la función $\eta(s) := s - e\log s$ $(s > 0)$. Calculamos sus extremos:

$$\eta'(s) = 1 - \frac{e}{s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = e\,.$$

Como

$$\eta''(s) = \frac{e}{s^2} > 0\,,$$

$s = e$ es el punto de mínimo absoluto de la función $\eta(s)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} & s - e\log s = \eta(s) \geq \eta(e) = e - e\log e = 0 \\ \Rightarrow \quad & -e\log s \geq -s \quad \Rightarrow \quad -\log s \geq -\frac{s}{e}\,. \end{aligned}$$

Consideramos la curva Γ_C de nivel C de la integral primera del sistema:

$$\begin{aligned} C = x - \log x + 2y - 4\log y \geq x - \frac{x}{e} + 2y - \frac{4y}{e} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)x + 2\left(1 - \frac{2}{e}\right)y \\ \Leftrightarrow \quad (e-1)x + 2(e-2)y \leq Ce\,, \end{aligned}$$

lo que significa que todos los puntos de la curva Γ_C están dentro del triángulo que se muestra en la Figura 11, de vértices

$$(0,0)\,, \quad \left(\frac{Ce}{e-1}, 0\right)\,, \quad \left(0, \frac{Ce}{2(e-2)}\right)\,.$$

Por tanto, Γ_C es acotada. De aquí se deduce que Γ_C es cerrada, aplicando la siguiente versión del Teorema de Poincaré-Bendixson que puede verse en L. Barreira and C. Valls, *Ordinary Differential Equations, Qualitative Theory,* Grad. Stud. in Math. **137,** American Mathematical Society, Providence, RI 2012, Theorem 7.11.

Teorema. *Sea el sistema diferencial autónomo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$, con $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de clase C^1. Si la trayectoria positiva de un punto $\boldsymbol{x}$ es acotada y su conjunto ω-límite $\omega(\boldsymbol{x})$ no contiene puntos de equilibrio, entonces $\omega(\boldsymbol{x})$ es una órbita periódica.*

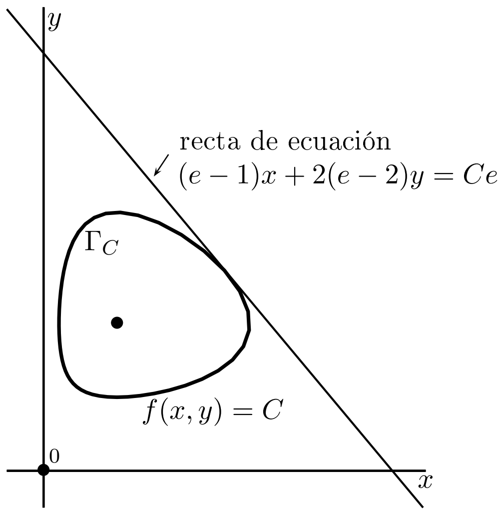


Figura 11: Trayectoria del sistema $x' = x(-4+2y)$, $y' = y(1-x)$ en el primer cuadrante

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2013-2014	**EXAMEN GLOBAL (10.1.2014)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 1
(3 puntos)

a) Hallar la solución $y(x)$ del siguiente problema de valor inicial, especificando su dominio maximal de definición:

$$(1+x^2)y'(x) = 2y^2(x) - \frac{1-x^2}{x}y(x) \quad ; \quad y(-1) = 1\,.$$

(1 punto)

b) Se considera el problema de valor inicial:

$$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad ; \quad X(0) = X_0 \tag{14}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-t}}{e^t+1} \\ \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \quad ; \quad X_0 = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b.1) Calcular e^{tA}. **(0,5 puntos)**

b.2) Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{d\sigma}{e^\sigma+1}$. **(0,5 puntos)**

b.3) Hallar la solución de (14). **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra más)
a) La ecuación es de Bernoulli. La escribimos en la forma:

$$(1+x^2)\,\frac{y'}{y^2} = 2 - \frac{(1-x^2)}{x}\,\frac{1}{y}\,.$$

Hacemos el cambio de función incógnita:

$$u := \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad u' = -\frac{y'}{y^2}\,.$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$-(1+x^2)u' = 2 - \frac{1-x^2}{x}\,u \quad \Rightarrow \quad (1+x^2)u' = \frac{1-x^2}{x}\,u - 2\,.$$

Hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$(1+x^2)u' = \frac{1-x^2}{x}\,u \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}\,.$$

Descomponemos el segundo miembro en fracciones simples:

$$\frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad 1-x^2 = A(1+x^2) + (Bx+C)x\,.$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{aligned} x^2) \qquad & -1 = A + B \\ x) \qquad & 0 = C \\ 1) \qquad & 1 = A\,, \end{aligned}$$

se obtiene $A = 1$, $B = -2$, $C = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} & \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} - \frac{2x}{1+x^2} \\ \Rightarrow \quad & \log|u| = \log|x| - \log(1+x^2) + \log|K| \\ \Rightarrow \quad & u_H(x) = \frac{Kx}{x^2+1}\,. \end{aligned}$$

Por el método de variación de las constantes, buscamos una solución particular de la ecuación completa en la forma:

$$\begin{aligned} & u_P(x) := \frac{K(x)x}{x^2+1} \\ \Rightarrow \quad & (1+x^2)\,\frac{[K'(x)x + K(x)](x^2+1) - 2x^2K(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{x}\,\frac{K(x)x}{x^2+1} - 2 \\ \Rightarrow \quad & K'(x)x + K(x) - \frac{2K(x)x^2}{x^2+1} = \frac{K(x)(1-x^2)}{x^2+1} - 2 \\ \Rightarrow \quad & K'(x)x = -2 \quad \Rightarrow \quad K'(x) = -\frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad K(x) = -2\log|x| \\ \Rightarrow \quad & u_P(x) = -\frac{2x}{x^2+1}\log|x|\,, \end{aligned}$$

y la solución general de la ecuación lineal completa es

$$u(x) = \frac{Kx - 2x\log|x|}{x^2+1}\,.$$

Deshaciendo el cambio, resulta:

$$y(x) = \frac{x^2+1}{Kx - 2x\log|x|}\,.$$

Imponemos la condición inicial

$$1 = y(-1) = \frac{2}{-K + 2\log|-1|} \quad \Rightarrow \quad K = -2\,,$$

y la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = -\frac{x^2+1}{2x(1+\log|x|)}\,.$$

El denominador se anula en $x = 0$ y para $1 + \log|x| = 0$, es decir, $|x| = e^{-1}$. Por tanto, el intervalo maximal de definición de la solución es

$$\left(-\infty, -\frac{1}{e}\right)\,,$$

que incluye el valor inicial $x = -1$.

b.1) Los autovalores de A son ± 1. Por tanto, se verifica:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{-t}M + e^{t}N \\ \Rightarrow \quad Ae^{tA} &= -e^{-t}M + e^{t}N \, , \end{aligned}$$

donde M y N son matrices 2×2 que hemos de determinar. Haciendo $t = 0$, se tiene

$$M + N = I \, , \qquad -M + N = A \, ,$$

de donde

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ M &= I - N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \, , \end{aligned}$$

y

$$e^{tA} = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & \operatorname{sh} t \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} .$$

b.2) Se tiene

$$\int \frac{d\sigma}{e^{\sigma}+1} = \int \frac{e^{-\sigma}\, d\sigma}{1+e^{-\sigma}} = -\log(1+e^{-\sigma}) \, .$$

b.3) La solución del problema de valor inicial está dada por

$$X(t) = e^{tA}\left[X_0 + \int_0^t e^{-\sigma A} B(\sigma)\, d\sigma\right] .$$

Calculamos el producto integrando:

$$e^{-\sigma A}B(\sigma) = \begin{pmatrix} e^{\sigma} & -\operatorname{sh}\sigma \\ 0 & e^{-\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-\sigma}}{e^{\sigma}+1} \\ \operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{e^{\sigma}+1} - \operatorname{sh}\sigma \operatorname{ch}\sigma \\ e^{-\sigma}\operatorname{ch}\sigma \end{pmatrix} .$$

Necesitamos la integral

$$\int_0^t \operatorname{sh}\sigma \operatorname{ch}\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sh} 2\sigma \, d\sigma = \frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{ch} 2\sigma}{2}\right]_0^t = \frac{1}{4}\operatorname{ch} 2t - \frac{1}{4} \, ,$$

y

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\sigma}\operatorname{ch}\sigma \, d\sigma &= \frac{1}{2}\int_0^t \left(1 + e^{-2\sigma}\right) d\sigma = \frac{1}{2}\left[\sigma - \frac{1}{2}e^{-2\sigma}\right]_0^t \\ \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}e^{-2t}\right) + \frac{1}{4} &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} \, . \end{aligned}$$

Integrando,

$$\int_0^t e^{-\sigma A}B(\sigma) = \begin{pmatrix} \log \dfrac{2}{1+e^{-t}} - \dfrac{1}{4}\operatorname{ch} 2t + \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}e^{-2t} + \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} .$$

Sumando X_0 y multiplicando por e^{tA}, resulta la solución del problema:

$$\begin{aligned}
X(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & \operatorname{sh} t \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log \dfrac{2}{1+e^{-t}} - \dfrac{1}{4} \operatorname{ch} 2t \\ \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{4}\, e^{-2t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} \log \dfrac{2}{1+e^{-t}} - \dfrac{1}{4}\, e^{-t} \operatorname{ch} 2t + \dfrac{1}{2}\, t \operatorname{sh} t - \dfrac{1}{4}\, e^{-2t} \operatorname{sh} t \\ \dfrac{1}{2}\, te^{t} - \dfrac{1}{4}\, e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} \log \dfrac{2}{1+e^{-t}} + \dfrac{1}{2}\, t \operatorname{sh} t - \dfrac{1}{4} \operatorname{ch} t \\ \dfrac{1}{2}\, te^{t} - \dfrac{1}{4}\, e^{-t} \end{pmatrix} ,
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\, e^{-t} \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{4}\, e^{-2t} \operatorname{sh} t &= -\frac{1}{4}\, e^{-t}\, \frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2} - \frac{1}{4}\, e^{-2t}\, \frac{e^{t}-e^{-t}}{2} \\
&= -\frac{1}{8} \left(e^{t} + e^{-3t} + e^{-t} - e^{-3t} \right) = -\frac{1}{4} \operatorname{ch} t\,.
\end{aligned}$$

Método alternativo.

Se puede calcular e^{tA} observando que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= I + \frac{1}{1!}\, tA + \frac{1}{2!}\, t^2 A^2 + \frac{1}{3!}\, t^3 A^3 + \cdots \\
&= I + \frac{1}{1!}\, tA + \frac{1}{2!}\, t^2 I + \frac{1}{3!}\, t^3 A + \cdots \\
&= I \left(1 + \frac{1}{2!}\, t^2 + \frac{1}{4!}\, t^4 + \cdots \right) + A \left(\frac{1}{1!}\, t + \frac{1}{3!}\, t^3 + \cdots \right) \\
&= I \operatorname{ch} t + A \operatorname{sh} t\,.
\end{aligned}$$

Y se puede resolver el problema de valor inicial sin necesidad de la matriz exponencial. En efecto, la segunda ecuación del sistema es

$$y' = y + \operatorname{ch} t\,.$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{ch} t$ es una combinación lineal de e^t y e^{-t} y que la raíz de la ecuación característica es 1, la solución general de la EDO en $y(t)$ es

$$\begin{aligned}
& y(t) = Ce^{t} + Ate^{t} + Be^{-t} \\
\Rightarrow \quad & y'(t) = Ce^{t} + Ae^{t} + Ate^{t} - Be^{-t}\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDO, resulta:

$$\frac{e^{t}+e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t = y'(t) - y(t) = Ae^{t} - 2Be^{-t}\,,$$

de donde

$$A = \frac{1}{2}\,, \qquad B = -\frac{1}{4}\,,$$

luego

$$y(t) = Ce^t + \frac{1}{2}\,te^t - \frac{1}{4}\,e^{-t}\,.$$

Imponiendo la condición inicial, se tiene:

$$-\frac{1}{4} = y(0) = C - \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 0\,,$$

y la solución en $y(t)$ es

$$y(t) = \frac{1}{2}\,te^t - \frac{1}{4}\,e^{-t}\,.$$

La primera ecuación del sistema es

$$\begin{aligned} x' &= -x + y + \frac{e^{-t}}{e^t+1} \\ &= -x + \frac{1}{2}\,te^t - \frac{1}{4}\,e^{-t} + \frac{e^{-t}}{e^t+1}\,. \end{aligned}$$

La solución general de la EDO homogénea asociada es $x_H(t) = Ke^{-t}$. Aplicando el método de variación de las constantes, probamos una solución particular de la ecuación completa en la forma:

$$x_P(t) = K(t)e^{-t} \quad \Rightarrow \quad x_P'(t) = K'(t)e^{-t} - K(t)e^{-t}\,.$$

Sustituyendo en la EDO,

$$\begin{aligned} K'(t)e^{-t} - K(t)e^{-t} &= -K(t)e^{-t} + \frac{1}{2}\,te^t - \frac{1}{4}\,e^{-t} + \frac{e^{-t}}{e^t+1} \\ \Rightarrow \quad K'(t) &= \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{e^t+1}\,. \end{aligned}$$

Integrando por partes, se obtiene

$$\int te^{2t}\,dt = \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt = \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{4}\,e^{2t}\,,$$

luego

$$K(t) = \frac{1}{4}\,te^{2t} - \frac{1}{8}\,e^{2t} - \frac{t}{4} - \log(1+e^{-t})\,,$$

y la solución general de la EDO en $x(t)$ es

$$x(t) = x_H(t) + x_P(t) = Ke^{-t} + \frac{1}{4}\,te^t - \frac{1}{8}\,e^t - \frac{t}{4}\,e^{-t} - e^{-t}\log(1+e^{-t})\,.$$

Imponiendo la condición inicial, resulta:

$$-\frac{1}{4} = x(0) = K - \frac{1}{8} - \log 2 \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{1}{8} + \log 2\,,$$

y la solución del problema en $x(t)$ es:

$$x(t) = -\frac{1}{4}\operatorname{ch} t + \frac{1}{2}\,t\operatorname{sh} t + e^{-t}\log\frac{2}{1+e^{-t}}\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2013-2014 **EXAMEN GLOBAL (10.1.2014)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula......................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 2
(3 puntos)

Se considera el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \quad , \quad 0 < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = e^x x(x-\pi) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \, . \end{cases} \tag{15}$$

a) Plantear el problema de autovalores asociado a (15) y determinar los correspondientes autovalores y autofunciones. **(1 punto)**
b) Calcular los coeficientes A_n del siguiente desarrollo en serie trigonométrico: **(0,5 puntos)**

$$x(x-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{sen}\, nx \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi \, .$$

c) Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución de (15). **(1,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)
a)
Por el método de separación de variables, buscamos soluciones de la EDP y de las condiciones de frontera en la forma

$$\begin{aligned} & u(x,t) = X(x)T(t) \\ \Rightarrow \quad & X(x)T'(t) = X''(x)T(t) - 2X'(x)T(t) \\ \Rightarrow \quad & \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} - 2\,\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \, , \end{aligned}$$

de donde se obtiene el problema de autovalores

$$\begin{gathered} X''(x) - 2X'(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \, . \end{gathered}$$

La ecuación característica asociada a la EDO es

$$r^2 - 2r - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1 \pm \sqrt{1+\lambda} \, .$$

Veamos qué valores puede tomar λ:
(1) Si $\lambda = -1$, $r = 1$ es raíz doble de la ecuación característica, y la solución general de la EDO es

$$X(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \, .$$

Imponiendo las condiciones de frontera, resulta:

$$\begin{aligned} & 0 = X(0) = c_1 \\ & 0 = X(\pi) = c_2 \pi e^{\pi} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0 \end{aligned}$$

y por tanto $X(x) \equiv 0$, que no es autofunción.

(2) Si $1+\lambda > 0$, la solución general de la EDO es

$$X(x) = c_1 e^{\left(1+\sqrt{1+\lambda}\right)x} + c_2 e^{\left(1-\sqrt{1+\lambda}\right)x} .$$

Imponiendo las condiciones de frontera, se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= X(0) = c_1 + c_2 \\ 0 &= X(\pi) = c_1 e^{\left(1+\sqrt{1+\lambda}\right)\pi} + c_2 e^{\left(1-\sqrt{1+\lambda}\right)\pi} , \end{aligned}$$

y resulta inmediatamente $c_1 = c_2 = 0$ y de nuevo $X(x) \equiv 0$.

(3) Si $1+\lambda < 0$, se tiene $1+\lambda = -|1+\lambda|$, luego $r = 1 \pm i\sqrt{|1+\lambda|}$, y la solución general de la EDO es

$$X(x) = e^x \left(c_1 \cos \sqrt{|1+\lambda|}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{|1+\lambda|}x \right) .$$

Imponiendo las condiciones de frontera, se tiene $0 = X(0) = c_1$ y

$$\begin{aligned} X(\pi) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{sen} \sqrt{|1+\lambda|}\pi = 0 \\ \Rightarrow \quad \sqrt{|1+\lambda|} = n \quad &\Rightarrow \quad |1+\lambda| = n^2 \quad \Rightarrow \quad 1+\lambda = -n^2 . \end{aligned}$$

Por tanto, los autovalores son

$$\lambda_n = -1 - n^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

y las autofunciones:

$$X_n(x) = e^x \operatorname{sen} nx \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

b)

Buscamos los números A_n tales que

$$x(x-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx \qquad (0 \leq x \leq \pi) .$$

Como

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx)\, dx = \frac{\pi}{2} ,$$

se obtiene para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(x-\pi) \operatorname{sen} nx\, dx \\ &\left(\begin{array}{ll} u = x(x-\pi) & \Rightarrow \; du = (2x-\pi)\, dx \\ dv = \operatorname{sen} nx\, dx & \Rightarrow \; v = -\dfrac{1}{n} \cos nx \end{array} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{1}{n} x(x-\pi) \cos nx \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi (2x-\pi) \cos nx\, dx \right\} \\ &\left(\begin{array}{ll} u = 2x-\pi & \Rightarrow \; du = 2\, dx \\ dv = \cos nx\, dx & \Rightarrow \; v = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} nx \end{array} \right) \\ &= -\frac{4}{\pi n^2} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^\pi = \frac{4}{\pi n^3} (\cos \pi n - 1) = \frac{4}{\pi n^3} \left[(-1)^n - 1 \right] . \end{aligned}$$

c)

Del apartado **a)** se obtienen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = \lambda_n = -(1+n^2) \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n e^{-(1+n^2)t} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

Ensayamos la solución del problema en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(1+n^2)t} e^x \operatorname{sen} nx\,.$$

Imponiendo la condición inicial, se tiene

$$e^x x(x-\pi) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^x \operatorname{sen} nx\,,$$

de donde

$$x(x-\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx \quad \Rightarrow \quad A_n = \frac{4}{\pi n^3}\,\left[(-1)^n - 1\right]\,,$$

y resulta la solución

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{x-t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\,\left[(-1)^n - 1\right] e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx \\ &= -\frac{8e^{x-t}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3}\, e^{-(2k+1)^2 t} \operatorname{sen}(2k+1)x\,. \end{aligned}$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 3
(4 puntos)

Se considera el siguiente sistema diferencial autónomo plano:

$$\begin{cases} x'(t) &= x(1-x^2-y^2) \\ y'(t) &= y(9-x^2-y^2)\,. \end{cases} \tag{16}$$

a) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio de (16). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 1,25 puntos. **(1,25 puntos)**

Los puntos de equilibrio son los que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x(1-x^2-y^2)=0 \\ y(9-x^2-y^2)=0\,. \end{cases}$$

Son soluciones:

$$x=0 \quad\Rightarrow\quad y(9-y^2)=0 \quad\Rightarrow\quad y=0\,,\quad y=\pm 3\,,$$

es decir, los puntos $(0,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$ y

$$x^2+y^2=1 \quad\Rightarrow\quad 8y=0 \quad\Rightarrow\quad y=0\,,\quad x=\pm 1\,,$$

de donde resultan los puntos $(1,0)$, $(-1,0)$.

Calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial $\boldsymbol{v}$ asociado al sistema diferencial:

$$D\boldsymbol{v}(x,y)=\begin{pmatrix} 1-3x^2-y^2 & -2xy \\ -2xy & 9-x^2-3y^2 \end{pmatrix}.$$

Particularizando en cada uno de los puntos de equilibrio, resulta:

$$D\boldsymbol{v}(0,0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

luego $(0,0)$ es una fuente (por tanto, inestable).

$$D\boldsymbol{v}(0,\pm 3)=\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

luego los puntos $(0,\pm 3)$ son sumideros (por tanto, asintóticamente estables).

$$D\boldsymbol{v}(\pm 1,0)=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

y los puntos $(\pm 1,0)$ son puertos (por tanto, inestables).

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0,0)$	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí
$(0,\pm 3)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No
$(\pm 1,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí

b) Dibujar el campo vectorial asociado a (16) en los ejes coordenados. **(0,25 puntos)**

Como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}(\alpha,0) &= (\alpha(1-\alpha^2),0) \\ \boldsymbol{v}(0,\beta) &= (0,\beta(9-\beta^2))\,, \end{aligned}$$

resulta en los ejes el campo vectorial que se muestra en la Figura 12.

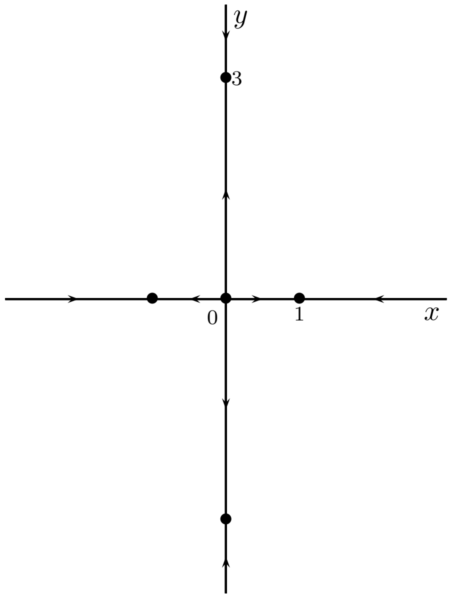


Figura 12: Ejes coordenados para dibujar el campo vectorial

c) Para cada $R>0$, se considera la región del primer cuadrante definida por:

$$F_R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad x^2+y^2\leq R^2\ ,\ x\geq 0\ ,\ y\geq 0\}\,.$$

Dibujar el campo vectorial asociado a (16) en la frontera de F_R para cada uno de los valores de R que se indican: **(0,75 puntos)**

Consideramos puntos (α,β) con $\alpha^2+\beta^2=R^2$. El campo vectorial en esos puntos es

$$\boldsymbol{v}(\alpha,\beta) = \big(\alpha(1-R^2),\beta(9-R^2)\big)\ ,$$

que puede verse en la Figura 13.

d) Determinar todos los valores de $R>0$ para los cuales F_R es positivamente invariante para (16). **(0,25 puntos)**

Escribimos la ecuación diferencial en $r(t)$, siendo r el radio polar. Derivando la identidad $r(t)^2 \equiv$

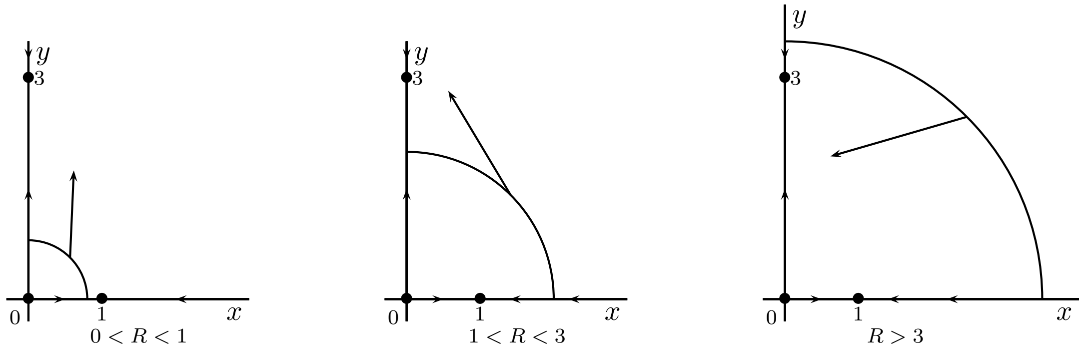


Figura 13: Cuadrantes positivos para dibujar el campo vectorial

$x(t)^2 + y(t)^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} rr' &= xx' + yy' = x^2(1-r^2) + y^2(9-r^2) \\ &= x^2 + 9y^2 - x^2r^2 - y^2r^2 = r^2 + 8y^2 - r^4 \\ &= r^2(1-r^2) + 8r^2 \operatorname{sen}^2\theta \\ \Rightarrow \quad r' &= r(1 - r^2 + 8\operatorname{sen}^2\theta)\,. \end{aligned}$$

Queremos hallar los valores de r que hagan que las trayectorias "entren" en el cuadrante de círculo, es decir, que hagan $r' \leq 0$, equivalentemente

$$r^2 \geq 1 + 8\operatorname{sen}^2\theta \qquad \text{para todo } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

lo cual implica

$$r^2 \geq \text{máx}(1 + 8\operatorname{sen}^2\theta) = 9 \quad \Leftrightarrow \quad r \geq 3\,.$$

Por tanto, F_R es positivamente invariante si y solo si $R \geq 3$.

e) Aplicando el Teorema de Poincaré-Bendixson, determinar los puntos del primer cuadrante (x_0, y_0), $(x_0 > 0,\, y_0 > 0)$ para los cuales la solución de (16), $(x(t), y(t))$ con $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, está definida para todo $t \in [0, +\infty)$. Para dichas soluciones, determinar $\text{lím}_{t\to+\infty}(x(t), y(t))$. **(0,5 puntos)**

Cualquier punto del primer cuadrante se puede incluir en una región F_R compacta y positivamente invariante, eligiendo R suficientemente grande. Aplicando el teorema de Hartman-Grobman a los puntos de equilibrio, que son todos hiperbólicos y, como el teorema de Poincaré implica que no existen órbitas cerradas, todas las órbitas del primer cuadrante están acotadas para $t \geq 0$ (en particular, existen para todo $t \geq 0$) y además tienden hacia el punto $(0, 3)$.

f) En la Figura 14, dibujar las distintas órbitas de (16) en el espacio de fases. **(0,5 puntos)**

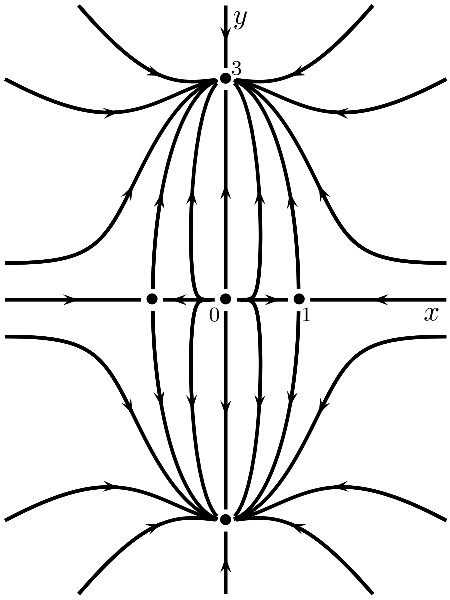


Figura 14: Diagrama de fases del sistema $x' = x(1 - r^2)$, $y' = y(9 - r^2)$

g) Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes, referidas al sistema (16). Cada respuesta errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,5 puntos. **(0,5 puntos)**

	V	**F**
1. Existe una integral primera no trivial definida en todo el espacio de fases		**F**
2. Existen soluciones periódicas no triviales		**F**
3. Existen ciclos límite		**F**
4. Todas las órbitas son indefinidamente prolongables en el tiempo hacia el futuro	**V**	
5. Los puntos de equilibrio son puntos estacionarios de la integral primera		**F**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**....................................

EJERCICIO 1
(4 puntos)

Se considera el sistema diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$X'(t) = AX(t) \tag{17}$$

en el que A es una matriz real constante 2×2.
NOTA.– La matriz A es diferente en cada uno de los apartados de este ejercicio.

a) Determinar los autovalores de A y sus respectivos autoespacios asociados si la solución general de (17) es:

$$X(t) = k_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz A. **(1 punto)**

b) Hallar la matriz A sabiendo que una solución particular de (17) es: **(0,5 puntos)**

$$X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

c) Razonar en cada uno de los siguientes casos si el vector $X(t)$ propuesto puede ser solución de (17) para alguna matriz A (cuya determinación no se pide): **(2,5 puntos)**

$$\text{(c.1)} \quad \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{(c.2)} \quad \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{(c.3)} \quad \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ te^t \end{pmatrix}$$

$$\text{(c.4)} \quad \begin{pmatrix} 3e^t + e^{-t} \\ 3e^t + e^{-t} \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{(c.5)} \quad \begin{pmatrix} 3e^t \\ t^2 e^t \end{pmatrix}$$

La calificación global de cada subapartado es de 0,5 puntos.

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra más)

a) Los autovalores y autovectores de la matriz A son obviamente:

$$\lambda_1 = 2 \quad , \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -3 \quad , \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La matriz diagonalizada es

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y $A = PA^*P^{-1}$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante vale 1. Por tanto,

$$P^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

de donde resulta:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -75 \\ 10 & -28 \end{pmatrix}.$$

b) La solución particular conocida es

$$X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} \\ e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, los autovalores y autovectores de A son:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz diagonalizada es

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y $A = PA^*P^{-1}$ siendo

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante igual a 2, de donde

$$P^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, se tiene

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)
(c.1) no es posible porque la matriz A tendría los tres autovalores 1, -1 y 2, lo que es absurdo.
(c.2) sí.
(c.3) no es posible porque A tendría el autovalor doble 1 y el simple -1, lo que es absurdo.
(c.4) no es posible porque A tendría los siguientes autovalores y autovectores

$$\lambda_1 = 1, \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1, \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y los autovectores son linealmente dependientes, lo que es absurdo.
(c.5) no es posible porque la matriz A tendría el autovalor triple 1, lo que es absurdo.

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2013-2014	**EXAMEN JULIO (25.6.2014)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula...................... **Grupo** ....

EJERCICIO 2
(4 puntos)

Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano:

$$\begin{cases} x'(t) = v_1(x,y) \\ y'(t) = v_2(x,y) \end{cases} \qquad v_1, v_2 \in C^1(\mathbb{R}^2) \tag{18}$$

que satisface todas las condiciones siguientes:

i) Tiene una integral primera $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ que no es constante en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.

ii) La gráfica de la curva de nivel cero de f es la que se muestra en la Figura 15.

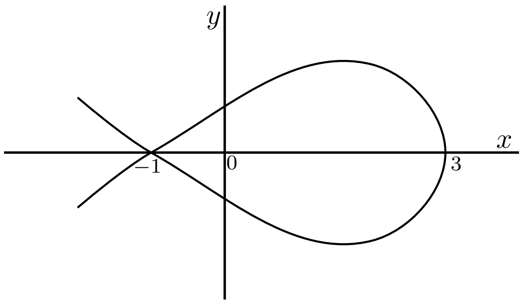


Figura 15: Curva de nivel cero de una integral primera

iii) f tiene un único extremo relativo. Este extremo relativo es un máximo estricto situado en el punto $(1,0)$.

iv) $v_1(3,0) = 0, \quad v_2(3,0) < 0 \quad ; \quad v_1(-2,0) = 0, \quad v_2(-2,0) < 0.$

v) El número de puntos de equilibrio de (18) es el menor de todos los posibles.

Se pide:

a) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio de (18). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 1 punto. La nota mínima de este apartado es cero puntos. **(1 punto)**

Puntos de equilibrio	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(-1,0)$	No	No	Sí
$(1,0)$	No	Sí	No

b) Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes, referidas al sistema diferencial (18). **(1 punto)**

NOTA.– Cada respuesta correcta se puntúa con 0,1 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 0,1 puntos. Las respuestas en blanco se puntúan con 0 puntos. La nota mínima global de **b)** es cero puntos.

	V	**F**
1. Todos los puntos de equilibrio son hiperbólicos		**F**
2. Algún punto de equilibrio es inestable	**V**	
3. Existe en el espacio de fases un conjunto compacto y positivamente invariante	**V**	
4. Todas las órbitas acotadas tienden hacia algún punto de equilibrio		**F**
5. Algún punto de equilibrio es estable según Lyapunov	**V**	
6. Los puntos de equilibrio estables son sumideros		**F**
7. Existen ciclos límite		**F**
8. Todas las órbitas acotadas son periódicas		**F**
9. Los puntos de equilibrio no pueden ser asintóticamente estables porque existe una función de Lyapunov que no es estricta		**F**
10. Todos los puntos de equilibrio son extremos relativos estrictos de la integral primera		**F**

c) Hacer un dibujo de las órbitas de (18) en el espacio de fases (Figura 16) que sea compatible y sin contradicciones con las respuestas dadas en los apartados anteriores. **(0,5 puntos)**

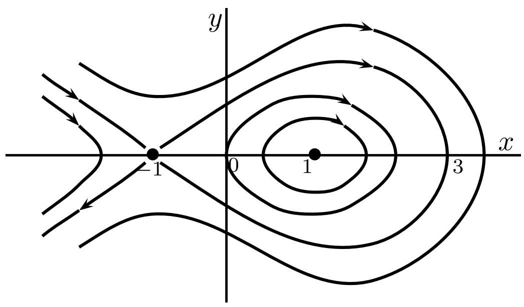


Figura 16: Diagrama de fases válido

d) Se consideran los siguientes diagramas en el espacio de fases $\mathbb{R}^2$ (Figura 17).

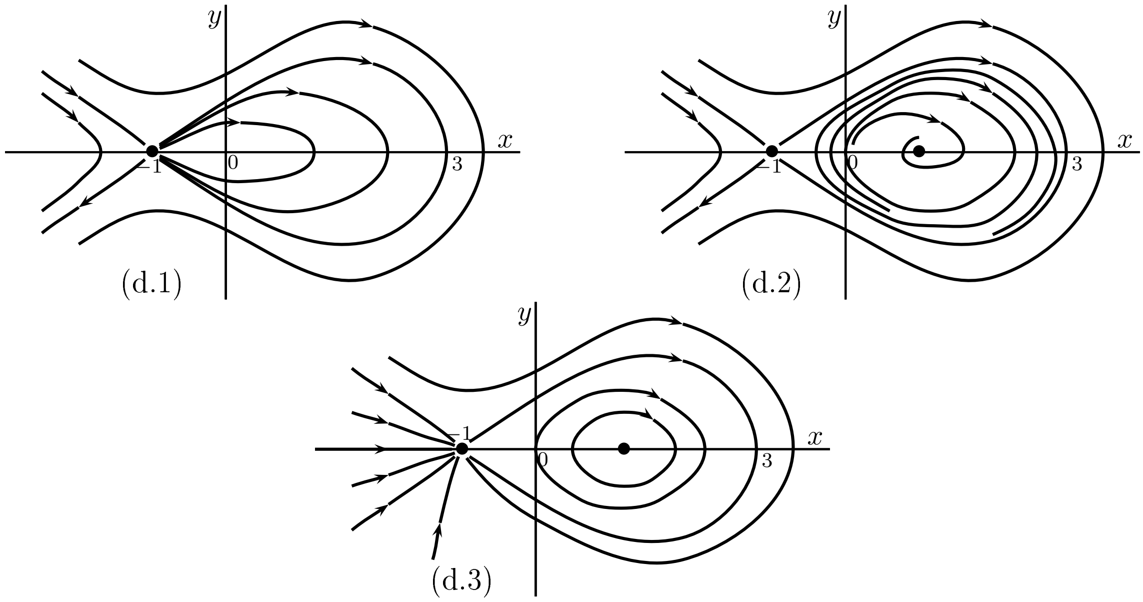


Figura 17: Posibles diagramas de fases

Señalar en el siguiente cuadro, escribiendo SÍ o NO en cada casilla, las condiciones del sistema (18) que se satisfacen para cada uno de los diagramas anteriores. No procede responder en la casilla marcada con un aspa. **(1,5 puntos)**

NOTA.– Cada respuesta incorrecta resta 0,1 puntos. Las casillas en blanco no puntúan. La puntuación mínima global de este apartado es cero puntos.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
(d.1)	No	No	No	Sí	No
(d.2)	No	No	No	Sí	Sí
(d.3)	No	No	X	No	Sí

En este ejercicio 2 solo se calificarán las respuestas que se escriban en los lugares indicados para cada pregunta.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula....................... **Grupo** ....

EJERCICIO 3
(2 puntos)

Se considera el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad 0 < x < 2\,, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(2,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2} + 3\operatorname{sen} 3\pi x\,, \quad 0 < x < 2 \end{cases} \tag{19}$$

a) Plantear el problema de autovalores asociado y determinar sus autovalores y autofunciones. **(0,5 puntos)**

b) Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución $u(x,t)$ de (19). **(1 punto)**

c) ¿Cuál de los siguientes es el valor numérico exacto de $u(1/4,0)$? **(0,5 puntos)**

$$\text{(i)} \quad \frac{16+\sqrt{2}}{2(\sqrt{2-\sqrt{2}}+3\sqrt{2})} \quad ; \quad \text{(ii)} \quad \frac{16-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2-\sqrt{2}}+3\sqrt{2})}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{-16+\sqrt{2}}{2(\sqrt{2-\sqrt{2}}-3\sqrt{2})} \quad ; \quad \text{(iv)} \quad \frac{-16-\sqrt{2}}{2(\sqrt{2-\sqrt{2}}-3\sqrt{2})}$$

NOTA.– Este apartado solo puntúa si se explicitan los cálculos necesarios para obtener el resultado correcto.

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) Buscamos soluciones de la EDP y de las condiciones de contorno en la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la EDP, resulta:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t)\,.$$

Dividiendo ambos miembros por $X(x)T(t)$, se obtiene como es sabido:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda\,. \tag{20}$$

Imponiendo a $X(x)T(t)$ las condiciones de contorno, obtenemos el problema de autovalores:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(2) = 0\,. \end{cases}$$

Sabemos que un problema como este no tiene autovalores no negativos. Por tanto, podemos escribir $\lambda = -|\lambda|$ y la solución general de la EDO en $X(x)$ es

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{|\lambda|}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}x\,.$$

Imponiendo las condiciones de contorno, resulta:

$$0 = X(0) = c_1$$
$$0 = X(2) = c_2 \operatorname{sen} 2\sqrt{|\lambda|} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{|\lambda|} = \pi n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|\lambda|} = \frac{\pi n}{2} \, .$$

Por tanto, los autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{4} \, , \qquad X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \, .$$

b) Sustituyendo los autovalores λ_n en la EDO en $T(t)$ que resulta de (20), obtenemos las ecuaciones diferenciales:

$$T_n'(t) = -\frac{\pi^2 n^2}{4} T_n(t) \quad \Rightarrow \quad T_n(t) = A_n e^{-\pi^2 n^2 t/4} \, .$$

Buscamos ahora una solución del problema del enunciado en forma de serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\pi^2 n^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2} \, .$$

Imponiendo la condición inicial:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + 3 \operatorname{sen} 3\pi x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{\pi n x}{2} \, ,$$

de donde, identificando los coeficientes de ambos miembros, se obtiene:

$$A_1 = 1 \, , \qquad A_6 = 3 \, , \qquad A_n = 0 \quad \text{para todo } n \neq 1, 6.$$

La solución del problema es, por tanto,

$$u(x,t) = e^{-\pi^2 t/4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} + 3 e^{-9\pi^2 t} \operatorname{sen} 3\pi x \, .$$

c) Se tiene

$$u\left(\frac{1}{4}, 0\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + 3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \, .$$

Por una parte,

$$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \, .$$

Utilizando la fórmula del ángulo mitad,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \, ,$$

se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} \, .$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} u\left(\frac{1}{4}, 0\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} + 3\sqrt{2}\right) \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 3\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2 - \sqrt{2} - 9 \cdot 2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 3\sqrt{2}} = \frac{-16 - \sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - 3\sqrt{2}\right)} \, , \end{aligned}$$

y la solución correcta es la (iv).

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 1
(4 puntos)

Se considera el sistema diferencial lineal:

$$X'(t) = AX(t) \tag{21}$$

en el que A es una matriz constante real $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Se desea determinar el comportamiento de las soluciones $X(t)$ del sistema (21) según la localización de los autovalores de A en el plano complejo.

- Una solución $X(t)$ es *amortiguada* si $\lim_{t\to+\infty} X(t) = \mathbf{0}$.
- Una solución $X(t)$ es *periódica* si existe $T_0 > 0$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}\,,\ X(t+T_0) = X(t)$.

a) Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes. Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 1 punto. **(1 punto)**

	V	**F**
1. Todas las soluciones del sistema (21) son amortiguadas si y solo si todos los autovalores de A son reales y negativos		
2. Todas las soluciones del sistema (21) son amortiguadas si y solo si todos los autovalores de A tienen su parte real negativa		
3. El sistema (21) tiene alguna solución periódica no trivial si y solo si A tiene algún autovalor complejo		
4. Si todas las soluciones del sistema (21) son periódicas, entonces todos los autovalores de A tienen su parte real nula		
5. Si todos los autovalores de A tienen su parte real nula, entonces todas las soluciones del sistema (21) son periódicas		

b) Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Calcular las constantes m, n, p, para que el polinomio característico de A (en la variable λ) verifique la identidad:

$$\det(A - \lambda I) = m\lambda^2(a-\lambda)^2 + n\lambda(a-\lambda) + p\,.$$

Calcular los autovalores de la matriz A. **(0,5 puntos)**

c) Se considera el sistema diferencial (21) con la matriz A definida en **b)**. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales todas las soluciones del sistema (21) son amortiguadas. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema (21) tiene alguna solución periódica. **(0,5 puntos)**

Se consideran dos masas $m_1 = m_2 = 1$, suspendidas de dos muelles que cuelgan de un soporte fijo, tal y como se indica en la figura.

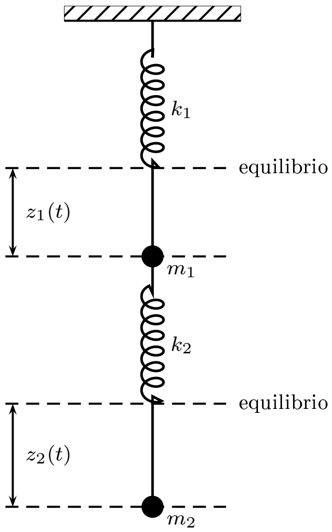


Figura 18: Doble muelle suspendido

Sean $z_1(t)$, $z_2(t)$, sus respectivas desviaciones respecto de la posición de equilibrio en el instante t. Dichas desviaciones satisfacen el sistema diferencial (22) siguiente, en el que $k_i > 0$ $(i = 1, 2)$ son las constantes de los muelles y $b_i \geq 0$ $(i = 1, 2)$ son los coeficientes de rozamiento:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1''(t) = -k_1 z_1(t) - k_2 z_1(t) + k_2 z_2(t) - b_1 z_1'(t) \\ z_2''(t) = k_2 z_1(t) - k_2 z_2(t) - b_2 z_2'(t) \end{array} \right. \tag{22}$$

d) Escribir el sistema diferencial equivalente a (22) en las nuevas variables de estado: **(0,5 puntos)**

$$x_1(t) = z_1(t)\,; \quad x_2(t) = z_1'(t)\,; \quad x_3(t) = z_2(t)\,; \quad x_4(t) = z_2'(t)\,.$$

e) Supóngase que $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $b_1 = b_2 = 0$ (movimiento sin rozamiento). Razonar si existen soluciones $z_1(t)$, $z_2(t)$ del sistema (22) tales que $\lim_{t\to+\infty} z_1(t) = \lim_{t\to+\infty} z_2(t) = 0$. Razonar si existen soluciones periódicas del sistema (22). En caso afirmativo, hallar todas las soluciones periódicas de (22) cuyo periodo sea igual a 2π. **(1 punto)**

f) Supóngase que $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $b_1 = b_2 = b > 0$. Calcular $\lim_{t\to+\infty} z_1(t)$, $\lim_{t\to+\infty} z_2(t)$. Calcular los valores de $b > 0$ para los cuales existen soluciones amortiguadas del sistema (22) que además son *oscilatorias,* es decir, tales que $z_1(t)$ y $z_2(t)$ se anulan para infinitos valores de $t > 0$. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y dos hojas más)

a)

	V	**F**
1. Todas las soluciones del sistema (21) son amortiguadas si y solo si todos los autovalores de A son reales y negativos		**F**
2. Todas las soluciones del sistema (21) son amortiguadas si y solo si todos los autovalores de A tienen su parte real negativa	**V**	
3. El sistema (21) tiene alguna solución periódica no trivial si y solo si A tiene algún autovalor complejo		**F**
4. Si todas las soluciones del sistema (21) son periódicas, entonces todos los autovalores de A tienen su parte real nula	**V**	
5. Si todos los autovalores de A tienen su parte real nula, entonces todas las soluciones del sistema (21) son periódicas		**F**

b) Calculamos el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -5 & a-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -2 & a-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda \begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2 & a-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 2 & -2 & a-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(a-\lambda)\left[\lambda(\lambda-a)+2\right] - \left[5\lambda(a-\lambda)+4-10\right] \\
&= \lambda^2(a-\lambda)^2 - 2\lambda(a-\lambda) - 5\lambda(a-\lambda) + 6 \\
&= \lambda^2(a-\lambda)^2 - 7\lambda(a-\lambda) + 6 \\
&= m\lambda^2(a-\lambda)^2 + n\lambda(a-\lambda) + p\,,
\end{aligned}$$

de donde

$$m = 1\,, \qquad n = -7\,, \qquad p = 6\,.$$

Para calcular los autovalores de A, hacemos la sustitución $z := \lambda(a-\lambda)$, con lo que la ecuación característica se transforma en

$$z^2 - 7z + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} 6 \\ 1\,. \end{cases}$$

En el primer caso $z = 6$ resulta:

$$\lambda(a-\lambda) = 6 \quad \Rightarrow \quad a\lambda - \lambda^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - a\lambda + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2-24}}{2}\,.$$

En el caso $z = 1$ se tiene:

$$\lambda(a-\lambda) = 1 \quad \Rightarrow \quad a\lambda - \lambda^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - a\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}\,.$$

c) Las soluciones del sistema (21) son amortiguadas si y solo si todos los autovalores de A tienen su parte real negativa, es decir,

$$a < 0\,.$$

El sistema (21) tiene alguna solución periódica si y solo si A tiene algún autovalor complejo con parte real nula, es decir,

$$a = 0\,.$$

d) El sistema diferencial lineal de primer orden equivalente a (22) es:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_1(t) + k_2x_3(t) - b_1x_2(t) \\ x_3'(t) = x_4(t) \\ x_4'(t) = k_2x_1(t) - k_2x_3(t) - b_2x_4(t) \end{cases}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1-k_2 & -b_1 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_2 & 0 & -k_2 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

e) Haciendo $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $b_1 = b_2 = 0$ como pide el enunciado, la matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

que es la matriz del apartado **b)** correspondiente al valor $a = 0$. Sus autovalores son:

$$\frac{\pm\sqrt{-24}}{2} = \pm\sqrt{-6} = \pm i\sqrt{6}\,, \qquad \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \pm i\,.$$

Claramente, no existen soluciones amortiguadas. Sí existen soluciones periódicas. La matriz A es diagonalizable en $\mathbb{C}$ puesto que todos sus autovalores son simples. La solución general del sistema obtenido en **d)** es:

$$X(t) = \mathrm{Re}\left[(c_1 + ic_2)e^{i\sqrt{6}t}\boldsymbol{w}_1 + (c_3 + ic_4)e^{it}\boldsymbol{w}_2\right]$$

donde $\boldsymbol{w}_1$ es un autovector de A asociado al autovalor $i\sqrt{6}$ y $\boldsymbol{w}_2$ es un autovector de A asociado al autovalor i.

Las soluciones periódicas del sistema de **d)** con periodo 2π son

$$X(t) = \mathrm{Re}\left[(c_3 + ic_4)e^{it}\boldsymbol{w}_2\right]\,.$$

El vector $\boldsymbol{w}_2 = (x, y, z, u)^{\mathsf{T}}$ satisface el sistema $(A - iI)\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$, es decir:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o bien:

$$\begin{cases} -ix + y = 0 \\ -5x - iy + 2z = 0 \\ -iz + u = 0 \\ 2x - 2z - iu = 0\,. \end{cases}$$

Dando el valor $x = 1$, resulta $y = i$, $z = 2$, $u = 2i$. Las soluciones de periodo 2π serán por tanto

$$\begin{aligned} X(t) &= \mathrm{Re}\left[(c_3 + ic_4)(\cos t + i \operatorname{sen} t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left\{\left[(c_3\cos t - c_4 \operatorname{sen} t) + i(c_4\cos t + c_3 \operatorname{sen} t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 2 \\ 2i \end{pmatrix}\right]\right\} \\ &= \begin{pmatrix} c_3\cos t - c_4 \operatorname{sen} t \\ -c_4\cos t - c_3 \operatorname{sen} t \\ 2c_3\cos t - 2c_4 \operatorname{sen} t \\ -2c_4\cos t - 2c_3 \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_3 \\ -c_4 \\ 2c_3 \\ -2c_4 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -c_4 \\ -c_3 \\ -2c_4 \\ -2c_3 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

y las soluciones del sistema (22) de periodo 2π son:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \tilde{k}_1 \cos t + \tilde{k}_2 \operatorname{sen} t \\ z_2(t) &= 2\tilde{k}_1 \cos t + 2\tilde{k}_2 \operatorname{sen} t\,. \end{aligned}$$

f) Dando los valores $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $b_1 = b_2 = b > 0$, la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -b & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -b \end{pmatrix}$$

que es la matriz del apartado **b)** con $a = -b$. Sus autovalores son, por tanto,

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 24}}{2}\,, \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}\,,$$

que siempre tienen parte real negativa, luego

$$\lim_{t \to +\infty} z_1(t) = \lim_{t \to +\infty} z_2(t) = 0\,.$$

Existen soluciones amortiguadas oscilatorias si algún autovalor de A es complejo, es decir, si

$$b^2 < 24 \quad \text{o bien} \quad b^2 < 4\,.$$

La primera condición es más general que la segunda y equivale a

$$b < 2\sqrt{6}\,.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 2
(4 puntos)

1) Hallar los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov, del siguiente sistema diferencial autónomo plano, dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = y + x^3 \\ y'(t) = a^{10}x - y^2 \end{cases} \tag{23}$$

Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los valores de a y la segunda con los correspondientes puntos de equilibrio del sistema (23). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,75 puntos. La notación AE significa "asintóticamente estable". **(0,75 puntos)**

Valores de a	Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	AE	Estable no AE	Inestable
$a \neq 0$	$(0,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$a \neq 0$	$(a^2, -a^6)$	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí
$a = 0$	$(0,0)$	No	No	No	No	No	No	Sí

CÁLCULOS: **(0,75 puntos)**

Los puntos de equilibrio son los que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} y + x^3 = 0 \\ a^{10}x - y^2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene $y = -x^3$. Sustituyendo en la segunda:

$$a^{10}x - (-x^3)^2 = a^{10}x - x^6 = x(a^{10} - x^5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = a^2 \end{cases}$$

de donde resultan los puntos de equilibrio:

$$(0,0)\,, \qquad (a^2, -a^6)\,.$$

La matriz jacobiana del campo vectorial es

$$D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ a^{10} & -2y \end{pmatrix}.$$

Supongamos $a \neq 0$. En el origen, que es uno de los puntos de equilibrio, se tiene:

$$D\boldsymbol{v}((0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^{10} & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante negativo, luego el punto $(0,0)$ es un puerto. En el otro punto,

$$D\boldsymbol{v}((a^2,-a^6)) = \begin{pmatrix} 3a^4 & 1 \\ a^{10} & 2a^6 \end{pmatrix}$$

con determinante positivo y traza positiva, luego el punto $(a^2,-a^6)$ es una fuente.

Sea ahora $a = 0$. Se tiene

$$D\boldsymbol{v}((0,0)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con un autovalor nulo doble, por tanto el método de linealización no proporciona información sobre la estabilidad del origen.

En el caso $a = 0$, se tiene

$$\boldsymbol{v}(\alpha,0) = (\alpha^3,0)$$

y el eje OX está formado por trayectorias que se alejan del origen que será, por tanto, inestable.

---

2) Hallar los puntos de equilibrio, y decidir su estabilidad según Lyapunov, del siguiente sistema diferencial autónomo:

$$\begin{cases} x'(t) = \log(1-z) \\ y'(t) = \log(1-x) \\ z'(t) = \log(1-y) \end{cases} \tag{24}$$

Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio del sistema (24). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,5 puntos. **(0,5 puntos)**

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0,0,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí

CÁLCULOS: **(0,5 puntos)**

Los puntos de equilibrio son los que satisfacen

$$\begin{cases} \log(1-z) = 0 \\ \log(1-x) = 0 \\ \log(1-y) = 0 \end{cases}$$

de donde $x = y = z = 0$ y el único punto de equilibrio es el origen.

La matriz jacobiana del campo vectorial es

$$D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{-1}{1-z} \\ \dfrac{-1}{1-x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{1-y} & 0 \end{pmatrix}.$$

En el origen se tiene

$$D\boldsymbol{v}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 1 = -(\lambda^3+1)\,.$$

Los autovalores de la matriz jacobiana son, por tanto, las raíces cúbicas de -1: una de ellas es -1 y las otras dos están en el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$ como es bien sabido. Por tanto, el origen es un puerto.

Si se prefiere, se pueden calcular las raíces del polinomio característico, sabiendo que una de ellas es $\lambda = -1$ y dividiéndolo por $\lambda + 1$ por la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

de donde

$$\lambda^3 + 1 = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1)\,.$$

Las raíces del polinomio de segundo grado son

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

---

3) Hallar los puntos de equilibrio, y decidir su estabilidad según Lyapunov, del siguiente sistema diferencial autónomo plano:

$$\left\{ \begin{aligned} x'(t) &= y - 2x^3 \\ y'(t) &= -x - y^3 \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio del sistema (25). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,5 puntos. **(0,5 puntos)**

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0,0)$	No	No	No	No	Sí	No	No

CÁLCULOS: **(0,5 puntos)**

Los puntos de equilibrio son los que satisfacen el sistema:

$$\left\{ \begin{aligned} y - 2x^3 &= 0 \\ -x - y^3 &= 0\,. \end{aligned} \right.$$

De la primera ecuación resulta $y = 2x^3$. Sustituyendo en la segunda,

$$-x - (2x^3)^3 = -x - 8x^9 = -x(1+8x^8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\,,$$

y el único punto de equilibrio es $(0,0)$.

Calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial

$$D\boldsymbol{v}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -6x^2 & 1 \\ -1 & -3y^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalores $\pm i$, luego la linealización no permite determinar la estabilidad del origen.

Buscamos una función de Lyapunov para el origen de la forma

$$V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n} \quad (a,b > 0\,,\ m,n \in \mathbb{N})\,.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{grad} V(x,y), \boldsymbol{v}(x,y) \rangle &= 2amx^{2m-1}(y - 2x^3) + 2bny^{2n-1}(-x - y^3) \\ &= 2amx^{2m-1}y - 4amx^{2m+2} - 2bny^{2n+2} - 2bnxy^{2n-1} \\ &= -4x^4 - 2y^4 < 0 \end{aligned}$$

para todo punto $(x,y) \neq (0,0)$, habiendo hecho la elección

$$a = b = m = n = 1\,.$$

Por tanto, la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ es una función de Lyapunov estricta para el origen y el origen es asintóticamente estable.

---

4) ¿Existen órbitas cerradas para el siguiente sistema diferencial autónomo plano? Razónese.

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 + y^2 - 1 \\ y'(t) = x - 4 \end{cases}$$

(0,5 puntos)

Respuesta

Es obvio que el sistema no tiene puntos de equilibrio. El Teorema de Poincaré implica que no tiene órbitas cerradas.

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2014-2015 **EXAMEN GLOBAL (19.01.2015)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....   **Número de matrícula**......................**Grupo**......................................

EJERCICIO 3
(2 puntos)

a) Hallar los autovalores y autofunciones del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x)\,, & 0 < x < 1 \\ X(0) = X'(1) = 0\,. \end{cases}$$

(1 punto)

b) Hallar los autovalores y autofunciones del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} x^2 Y''(x) + xY'(x) = \lambda Y(x)\,, & 1 < x < e \\ Y(1) = Y'(e) = 0\,. \end{cases}$$

(1 punto)

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) La ecuación característica de la EDO es $r^2 = \lambda$, con raíces $r = \pm\sqrt{\lambda}$.
(1) Supongamos $\lambda > 0$. La solución general de la EDO es

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

con derivada

$$X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}x}\,.$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0$$
$$X'(1) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} = 0\,.$$

De la primera ecuación resulta $c_2 = -c_1$. Sustituyendo en la segunda,

$$0 = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}} + c_1\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}} = 2c_1\sqrt{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{\lambda}$$

lo que implica $c_1 = 0$ y $c_2 = 0$, luego $X(x) \equiv 0$ que no es autofunción, luego no hay autovalores positivos.

(2) Supongamos $\lambda = 0$. La EDO se reduce a $X''(x) = 0$ con solución general $X(x) = c_1 + c_2 x$ y derivada $X'(x) = c_2$. Imponemos las condiciones de contorno:

$$X(0) = c_1 = 0$$
$$X'(1) = c_2 = 0\,,$$

y resulta $X(x) \equiv 0$, luego tampoco hay autovalor nulo.

(3) Si $\lambda < 0$, podemos escribir $\lambda = -|\lambda|$. Las raíces de la ecuación característica son $r = \pm i\sqrt{|\lambda|}$ y la solución general de la EDO es

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{|\lambda|}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}x$$

con derivada

$$X'(x) = -c_1\sqrt{|\lambda|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}x + c_2\sqrt{|\lambda|}\cos\sqrt{|\lambda|}x\,.$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$X(0) = c_1 = 0 \quad\Rightarrow\quad X'(1) = c_2\sqrt{|\lambda|}\cos\sqrt{|\lambda|} = 0$$

de donde, o bien $c_2 = 0$, lo que daría la función $X(x) \equiv 0$ que no es autofunción, o bien

$$\cos\sqrt{|\lambda|} = 0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{|\lambda|} = (2n+1)\,\frac{\pi}{2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,.$$

Por tanto, los autovalores son

$$\lambda_n = -(2n+1)^2\,\frac{\pi^2}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y las autofunciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(2n+1)\,\frac{\pi x}{2}\,.$$

b) La EDO es de Euler. Hacemos por tanto el cambio de variable independiente $x \mapsto \sigma$ siendo $x = e^\sigma$, de donde

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{dx} &= e^{-\sigma}\,\frac{dY}{d\sigma} \\
\frac{d^2Y}{dx^2} &= e^{-\sigma}\,\frac{d}{d\sigma}\left(e^{-\sigma}\,\frac{dY}{d\sigma}\right) = -e^{-2\sigma}\,\frac{dY}{d\sigma} + e^{-2\sigma}\,\frac{d^2Y}{d\sigma^2}\,.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDO,

$$\frac{d^2Y}{d\sigma^2} - \frac{dY}{d\sigma} + \frac{dY}{d\sigma} = \lambda Y \quad\Rightarrow\quad Y''(\sigma) = \lambda Y(\sigma)\,.$$

Hacemos el cambio de variable en los puntos extremos:

$$\begin{aligned}
x = 1 \quad&\Rightarrow\quad \sigma = 0 \\
x = e \quad&\Rightarrow\quad \sigma = 1\,,
\end{aligned}$$

y las condiciones de contorno se transforman en $Y(0) = Y'(1) = 0$.

Hemos obtenido por tanto el mismo problema de autovalores y autofunciones del apartado **a)** cuyos autovalores son

$$\lambda_n = -(2n+1)^2\,\frac{\pi^2}{4} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y las autofunciones:

$$Y_n(\sigma) = \operatorname{sen}(2n+1)\,\frac{\pi\sigma}{2} \quad\Rightarrow\quad Y_n(x) = \operatorname{sen}\left[\frac{2n+1}{2}\,\pi\log x\right]\,.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 1
(3 puntos)

Un modelo matemático sencillo para el crecimiento diario del área de una hoja de una planta es:

$$S'(t) = aS^{3/2}(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi(t-6)}{12} \quad , \quad 6 \le t \le 18 \tag{26}$$

en donde $S(t)$ representa el área de la hoja en el instante t del día y $a > 0$ es una constante de proporcionalidad. La hoja crece desde que sale el sol cuando $t = 6$h. hasta la puesta del sol cuando $t = 18$h.

a) Resolver la E.D.O. (26) y expresar $S(t)$ en términos de t, a y del área de la hoja $S_0 = S(6) > 0$ en el inicio del día. **(1 punto)**

b) Determinar los valores del dato inicial $S_0 > 0$ para los cuales es válido el modelo. **(0,5 puntos)**

Para simplificar los cálculos, en los apartados que siguen se elige el dato inicial:

$$S_0 = \frac{\pi^2}{36^2 a^2} \,.$$

c) Calcular el instante del día t^*, $6 \le t^* \le 18$, de máxima velocidad de crecimiento de la hoja. Calcular dicha velocidad máxima. **(1 punto)**

d) Determinar el tamaño de la hoja al final del día. **(0,5 puntos)**

Nota.– El modelo (26) se ha formulado bajo la hipótesis sencilla de que la hoja es plana, que su forma geométrica no se modifica al crecer y que la velocidad de crecimiento de su área es proporcional a la longitud del contorno de la hoja ($\approx \sqrt{S(t)}$) y a la cantidad de rayos solares que inciden sobre ella, que depende del ángulo de incidencia en cada momento del día ($\approx S(t)\,\mathrm{sen}\,\pi(t-6)/12$).

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra más)

a) La ecuación es separable. Integrándola como tal, se tiene:

$$\begin{aligned} &\int S^{-3/2}\,dS = a \int \mathrm{sen}\,\frac{\pi(t-6)}{12}\,dt \\ \Rightarrow\quad & -2S^{-1/2} = -a\,\frac{12}{\pi}\cos\frac{\pi(t-6)}{12} + K \\ \Rightarrow\quad & \frac{1}{\sqrt{S}} = \frac{6a}{\pi}\cos\frac{\pi(t-6)}{12} + K\,. \end{aligned}$$

Haciendo $t = 6$, resulta

$$K = \frac{1}{\sqrt{S_0}} - \frac{6a}{\pi}\,.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{S}} = \frac{6a}{\pi}\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12} - 1\right] + \frac{1}{\sqrt{S_0}}\,,$$

y la solución es

$$S(t)=\left\{\frac{6a}{\pi}\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{S_0}}\right\}^{-2}\qquad(6\le t\le 18)\,.$$

Obsérvese que $S(t)>0$, $t\in[6,18]$.

b) El modelo no es válido si la solución $S(t)$ con $S(6)=S_0$ no está definida para todo $t\in[6,18]$. Esto sucede si la ecuación en la incógnita t:

$$\frac{6a}{\pi}\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{S_0}}=0\quad\Leftrightarrow\quad\cos\frac{\pi(t-6)}{12}=1-\frac{\pi}{6a\sqrt{S_0}}$$

tiene alguna solución $t^*\in[6,18]$. Tal solución existe si y solo si:

$$-1\le 1-\frac{\pi}{6a\sqrt{S_0}}\le 1\quad\Leftrightarrow\quad S_0\ge\frac{\pi^2}{144a^2}\,.$$

Por lo tanto, concluimos que la validez del modelo está restringida a hojas cuyo tamaño inicial no es *demasiado grande,* es decir:

$$S_0\in\left(0,\,\frac{\pi^2}{144a^2}\right).$$

Para simplificar los cálculos en los siguientes apartados, sustituimos en la solución $S(t)$ el valor propuesto en el enunciado para el dato inicial, que pertenece al intervalo de datos iniciales obtenido en el apartado (b), para los cuales el modelo es válido. Resulta:

$$S(t)=\left\{\frac{6a}{\pi}\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12}-1\right]+\frac{36a}{\pi}\right\}^{-2}=\left(\frac{\pi}{6a}\right)^2\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12}+5\right]^{-2}.$$

c) La velocidad de crecimiento es

$$\begin{aligned}S'(t)&=-2\left(\frac{\pi}{6a}\right)^2\left[-\operatorname{sen}\frac{\pi(t-6)}{12}\right]\frac{\pi}{12}\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12}+5\right]^{-3}\\&=\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\frac{1}{a^2}\operatorname{sen}\frac{\pi(t-6)}{12}\left[\cos\frac{\pi(t-6)}{12}+5\right]^{-3}.\end{aligned}$$

Para calcular el valor máximo de $S'(t)$ igualamos a cero la derivada segunda. Para abreviar la notación, hacemos

$$\alpha:=\cos\frac{\pi(t-6)}{12}\quad\Rightarrow\quad\operatorname{sen}^2\frac{\pi(t-6)}{12}=1-\alpha^2\,.$$

Se tiene por tanto

$$S''(t)=\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\frac{1}{2a^2}\frac{-2\alpha^2+5\alpha+3}{(\alpha+5)^4}$$

de donde

$$S''(t)=0\quad\Rightarrow\quad 2\alpha^2-5\alpha-3=0\quad\Rightarrow\quad\alpha=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}=\begin{cases}3\\-1/2\end{cases}$$

El valor $\alpha=3$ no es posible, luego

$$\alpha=\cos\frac{\pi(t-6)}{12}=-\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\pi(t-6)}{12}=\frac{2\pi}{3}\quad\Rightarrow\quad t-6=8\quad\Rightarrow\quad t^*=14\text{h}.$$

La velocidad de crecimiento es máxima en el instante $t^* = 14$h. La velocidad máxima es

$$\begin{aligned} S'(t^*) = S'(14) &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{a^2} \operatorname{sen} \frac{8\pi}{12} \left[\cos \frac{8\pi}{12} + 5\right]^{-3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \frac{1}{a^2} \frac{4\sqrt{3}}{729} = \frac{8\sqrt{3}\pi S_0}{243} \,. \end{aligned}$$

d) El tamaño de la hoja al final del día es:

$$S(18) = \left(\frac{\pi}{6a}\right)^2 [\cos \pi + 5]^{-2} = \left(\frac{\pi}{6a}\right)^2 \frac{1}{16} = \frac{9S_0}{4} \,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2014-2015	**EXAMEN JULIO (1.07.2015)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 2
(3 puntos)

a) Hallar los autovalores y autofunciones del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \quad , \quad -\pi \le x \le \pi \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

(0,5 puntos)

b) Expresar $\cos^5 \alpha$ como una combinación lineal de las funciones $\cos k\alpha$, $k = 1, 2, \ldots$.
Indicación: $\cos \alpha = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$. **(0,5 puntos)**

c) Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales y de contorno: **(1,5 puntos)**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad -\pi < x < \pi \ , \ t > 0 \\ u(-\pi, t) = u(\pi, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3 \operatorname{sen} 2x + \cos^5 \dfrac{x}{2} \quad , \quad -\pi < x < \pi \end{cases}$$

d) Calcular:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^5 \frac{x}{2} \cos \frac{2n+1}{2} x \, dx \quad , \quad n = 0, 1, \ldots$$

(0,5 puntos)

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) No se obtienen autovalores para $\lambda \ge 0$. Sea $\lambda = -|\lambda| < 0$. La solución general de la EDO es:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{|\lambda|}\, x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{|\lambda|}\, x \, .$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} c_1 \cos \pi\sqrt{|\lambda|} - c_2 \operatorname{sen} \pi\sqrt{|\lambda|} = 0 \\ c_1 \cos \pi\sqrt{|\lambda|} + c_2 \operatorname{sen} \pi\sqrt{|\lambda|} = 0 \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos

$$\cos \pi\sqrt{|\lambda|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi\sqrt{|\lambda|} = (2n+1)\,\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_n = -\dfrac{(2n+1)^2}{4} \\ X_n(x) = \cos \dfrac{2n+1}{2}\, x \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

y, restando miembro a miembro,

$$\operatorname{sen} \pi\sqrt{|\lambda|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi\sqrt{|\lambda|} = n\pi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_n = -n^2 \\ X_n(x) = \operatorname{sen} nx \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos^5 \alpha &= \left(\frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32}\left[\binom{5}{0} e^{5i\alpha} + \binom{5}{1} e^{3i\alpha} + \binom{5}{2} e^{i\alpha} + \binom{5}{3} e^{-i\alpha} + \binom{5}{4} e^{-3i\alpha} + \binom{5}{5} e^{-5i\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{32}\left[\left(e^{5i\alpha} + e^{-5i\alpha}\right) + 5\left(e^{3i\alpha} + e^{-3i\alpha}\right) + 10\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)\right] \\
&= \frac{1}{16}\left(\cos 5\alpha + 5\cos 3\alpha + 10\cos\alpha\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$\cos^5 \alpha = \frac{5}{8}\cos\alpha + \frac{5}{16}\cos 3\alpha + \frac{1}{16}\cos 5\alpha\,.$$

c) Buscamos soluciones de la EDP y las condiciones de frontera en la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda\,,$$

de donde obtenemos el problema de autovalores asociado

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

resuelto en el apartado **a)**.

Sustituyendo los valores de λ obtenidos en **a)** en la EDO $T'(t) = \lambda T(t)$, obtenemos las soluciones generales

$$\begin{aligned}
&T_n^{(1)}(t) = e^{-(2n+1)^2 t/4} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \\
&T_n^{(2)}(t) = e^{-n^2 t} \quad (n = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}$$

Aplicamos el principio de superposición:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(2n+1)^2 t/4} \cos\frac{2n+1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx\,.$$

Imponiendo la condición inicial y utilizando el resultado de **b):**

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{2n+1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} nx \\
&= \cos^5\frac{x}{2} + 3\operatorname{sen} 2x \\
&= \frac{5}{8}\cos\frac{x}{2} + \frac{5}{16}\cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{16}\cos\frac{5x}{2} + 3\operatorname{sen} 2x\,.
\end{aligned}$$

Identificando coeficientes, resulta:

$$\begin{aligned}
&A_0 = \frac{5}{8}\,, \quad A_1 = \frac{5}{16}\,, \quad A_2 = \frac{1}{16}\,, \quad A_n = 0 \quad (n \geq 3) \\
&B_2 = 3\,, \quad B_n = 0 \quad (n \neq 2)\,.
\end{aligned}$$

La solución del problema planteado es:

$$u(x,t) = \frac{5}{8}\, e^{-t/4} \cos\frac{x}{2} + \frac{5}{16}\, e^{-9t/4} \cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{16}\, e^{-25t/4} \cos\frac{5x}{2} + 3e^{-4t} \operatorname{sen} 2x\,.$$

d) Si escribimos el desarrollo en serie de Fourier de $\cos^5 x/2$:

$$\cos^5 \frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{2n+1}{2}\, x \quad (-\pi \le x \le \pi)\,,$$

se tiene que:

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^5 \frac{x}{2} \cos\frac{2n+1}{2}\, x\, dx = A_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \frac{2n+1}{2}\, x\, dx = \pi A_n\,.$$

En el apartado **b)** hemos obtenido ese desarrollo:

$$\cos^5 \frac{x}{2} = \frac{5}{8} \cos\frac{x}{2} + \frac{5}{16} \cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{16} \cos\frac{5x}{2}\,,$$

de donde

$$A_0 = \frac{5}{8}\,, \quad A_1 = \frac{5}{16}\,, \quad A_2 = \frac{1}{16}\,, \quad A_n = 0 \quad (n \ge 3)$$

y, en consecuencia,

$$I_0 = \pi A_0 = \frac{5\pi}{8}\,, \quad I_1 = \pi A_1 = \frac{5\pi}{16}\,, \quad I_2 = \pi A_2 = \frac{\pi}{16}\,, \quad I_n = 0 \quad (n \ge 3)\,.$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 3
(4 puntos)

Sea (S) un sistema diferencial no lineal autónomo definido y de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

a) Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes, referidas al sistema (S). Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 1 punto. La calificación mínima de este apartado es 0 puntos. **(1 punto)**

	V	**F**
Si (S) tiene órbitas cerradas, entonces (S) tiene al menos un punto de equilibrio estable.		**F**
Si todos los puntos de equilibrio de (S) son inestables, entonces (S) no tiene órbitas cerradas.		**F**
Si existe un conjunto $F \subset \mathbb{R}^2$ no vacío, compacto y positivamente invariante para (S), que no contiene ningún punto de equilibrio, entonces (S) tiene órbitas cerradas.	**V**	
Supóngase que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ es una integral primera para (S). Si (x_0, y_0) es un punto estacionario de f, entonces (x_0, y_0) es un punto de equilibrio estable para (S).		**F**
Si (x_1, y_1) es un punto de equilibrio hiperbólico estable para (S), entonces (x_1, y_1) no es asintóticamente estable.		**F**

b) Hacer un dibujo claro y cuidadoso de las órbitas en el espacio de fases para un sistema (S) que satisface las condiciones siguientes: **(0,5 puntos)**

i) $(0, 0)$ es el único punto de equilibrio de (S), que además es inestable.
ii) La órbita de (S) que pasa por el punto $(3, 0)$ es $x(t) = 3 \cos t,\ y(t) = 2 \operatorname{sen} t,\ t \in \mathbb{R}$.

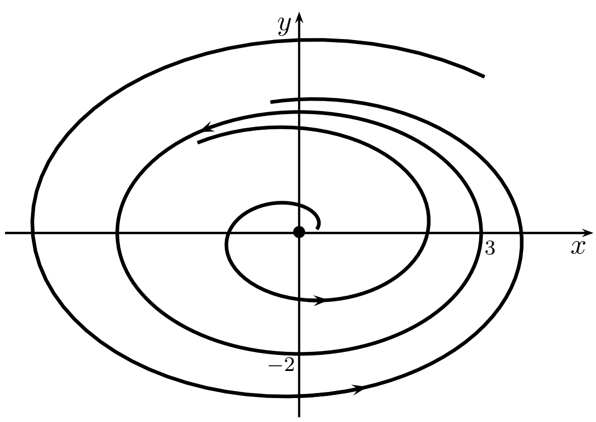


Figura 19: Órbita cerrada en torno a un punto de equilibrio inestable

La órbita indicada es una elipse. El posible sistema que cumpla las condiciones dadas no es único.

Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano:

$$x'(t) = x - y^2 \quad ; \quad y'(t) = x^2 - y \tag{27}$$

c) Calcular la constante $a \in \mathbb{R}$ para que

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + axy$$

sea una integral primera para (27). Para el valor de a calculado, hallar y clasificar los puntos estacionarios de f. **(0,5 puntos)**

Se tiene:

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{grad} f, \boldsymbol{v} \rangle &= (3x^2 + ay)(x - y^2) + (3y^3 + ax)(x^2 - y) \\ &= (3 + a)x^3 - (3 + a)y^3 \quad \Rightarrow \quad a = -3\,,\end{aligned}$$

luego la integral primera es

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy\,.$$

Los puntos estacionarios de f son los que verifican

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3x = 0\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad (0, 0)\ , \quad (1, 1)\,.$$

La matriz hessiana de f es

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

Particularizando en los puntos estacionarios:

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalores ± 3, luego $(0, 0)$ es un punto de silla.

$$Hf(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

y el punto $(1, 1)$ es un punto de mínimo.

d) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio del sistema diferencial (27). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 1 punto. La calificación mínima de este apartado es 0 puntos. **(1 punto)**

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0, 0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$(1, 1)$	No	No	No	No	No	Sí	No

Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano:

$$x'(t) = x^2 - x - y \quad ; \quad y'(t) = x \tag{28}$$

e) Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes, referidas al sistema diferencial (28). Cada respuesta errónea resta 0,25 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,5 puntos. La calificación mínima de este apartado es 0 puntos. **(0,5 puntos)**

Buscamos una función de Lyapunov de la forma $V(x,y) = ax^{2m} + by^{2n}$ con $a, b > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$. Si $\boldsymbol{x}(t)$ es una solución del sistema, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{V(\boldsymbol{x}(t))}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t) \\
&= 2amx^{2m-1}(x^2 - x - y) + 2bny^{2n-1}x \\
&= 2amx^{2m+1} - 2amx^{2m} - 2amx^{2m-1}y + 2bny^{2n-1}x \\
&= 2x^3 - 2x^2 = 2x^2(x-1) \leq 0\,,
\end{aligned}$$

en el abierto del plano $x < 1$ que contiene al origen. Se han elegido los valores de las constantes $m = n = a = b = 1$. Por tanto, la función $V(x,y) = x^2 + y^2$ es de Lyapunov no estricta para el sistema en el punto $(0,0)$.

	V	**F**
Existe una función de Lyapunov no estricta para (28) en el punto $(0,0)$.	**V**	
Si existe una función de Lyapunov no estricta para (28) en el punto $(0,0)$, entonces dicho punto de equilibrio es estable pero no es asintóticamente estable.		**F**

f) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio del sistema diferencial (28). Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,5 puntos. La calificación mínima de este apartado es 0 puntos. **(0,5 puntos)**

La matriz jacobiana del campo vectorial $\boldsymbol{v}$ asociado al sistema diferencial es

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el origen se tiene

$$D\boldsymbol{v}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con polinomio característico $\lambda^2 + \lambda + 1$ y autovalores

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\,,$$

ambos con parte real estrictamente negativa, luego el punto $(0,0)$ es un sumidero.

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0,0)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula....................... **Grupo** ....

EJERCICIO 1
(3 puntos)

Se considera el siguiente sistema diferencial autónomo plano, dependiente del parámetro real $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = \operatorname{sen} x(a\cos x - 1) \end{cases} \tag{29}$$

a) Hallar una integral primera de (29). **(0,5 puntos)**

b) Hallar los puntos de equilibrio de (29), (x^*, y^*) tales que $x^* \in [0, \pi]$, $y^* \in \mathbb{R}$ y determinar su estabilidad según Lyapunov, para los diferentes valores del parámetro $a > 0$, $a \neq 1$. **(0,75 puntos)**

c) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los valores de a y la segunda con los correspondientes puntos de equilibrio de (29) a que se refiere el apartado **b)**. Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,75 puntos. La calificación mínima de este apartado es de 0 puntos. Las casillas en blanco no puntúan.

La notación AE significa *asintóticamente estable.* **(0,75 puntos)**

Valores de a	Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	AE	Estable no AE	Inestable
$0 < a < 1$	$(0,0)$	No	No	No	No	No	Sí	No
$0 < a < 1$	$(\pi,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$a > 1$	$(0,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$a > 1$	$(\pi,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$a > 1$	$\left(\arccos\frac{1}{a}, 0\right)$	No	No	No	No	No	Sí	No

Se considera un anillo circular rígido plano vertical, de radio $r > 0$, que efectúa un movimiento de rotación alrededor de su diámetro vertical, con velocidad angular constante $\omega > 0$.

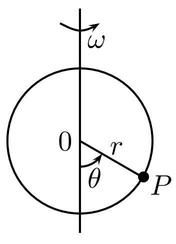


Figura 20: Anillo circular

Ligada al anillo se coloca una partícula P de masa $m > 0$, que puede desplazarse sin rozamiento a lo largo del anillo.

Si $\theta(t)$ es el ángulo de desplazamiento de P respecto de la vertical en el instante t, tal y como se indica en la Figura 20, el balance de fuerzas que actúan sobre P proporciona la ecuación del movimiento:

$$mr\,\frac{d^2\theta}{dt^2}\,(t) = -mg\,\operatorname{sen}\theta(t) + m\omega^2 r\,\operatorname{sen}\theta(t)\cos\theta(t)\,. \tag{30}$$

Particularizando dicha ecuación para los valores numéricos $g \approx 10$, $r = 10$, $\omega > 0$, $\omega \neq 1$, resulta:

$$\theta''(t) = -\operatorname{sen}\theta(t) + \omega^2\operatorname{sen}\theta(t)\cos\theta(t)\,.$$

d) Hallar las posiciones de equilibrio de P, según los diferentes valores de $\omega > 0$, $\omega \neq 1$, especificando su estabilidad según Lyapunov. **(0,5 puntos)**

e) Describir el movimiento de P, según los valores de $\omega > 0$, $\omega \neq 1$, si su posición inicial es $\theta(0) = \theta_0$ con $0 < \theta_0 < \pi/2$. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otras dos hojas más)

a) Calculamos una integral primera por el método habitual, aplicando la regla de la cadena a lo largo de una trayectoria cualquiera:

$$\begin{aligned}
& y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\operatorname{sen}x(a\cos x - 1)}{y} \\
\Rightarrow\quad & yy' = \operatorname{sen}x(a\cos x - 1) = \frac{a}{2}\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}x \qquad \text{(ecuación separable)} \\
\Rightarrow\quad & \frac{y^2}{2} = -\frac{a}{4}\cos 2x + \cos x + C\,.
\end{aligned}$$

Por tanto, una integral primera es

$$f(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{a}{4}\cos 2x - \cos x$$

o bien

$$f(x,y) = 2y^2 + a\cos 2x - 4\cos x\,.$$

b) Los puntos de equilibrio son los que satisfacen las ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ \\ \operatorname{sen}x(a\cos x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \operatorname{sen}x = 0 & \Rightarrow & x = 0,\ x = \pi \\ \cos x = \dfrac{1}{a} & \Rightarrow & x = \arccos\left(\dfrac{1}{a}\right) \ \text{ si } a > 1. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Por tanto, los puntos de equilibrio con $x^* \in [0,\pi]$, $y^* \in \mathbb{R}$ son:

$$\begin{array}{rcl}
0 < a < 1 & \Rightarrow & (0,0)\,,\quad (\pi,0) \\
a > 1 & \Rightarrow & (0,0)\,,\quad (\pi,0)\,,\quad \left(\arccos\left(\dfrac{1}{a}\right),0\right)\,.
\end{array}$$

Calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial para aplicar el método de linealización:

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a\cos 2x - \cos x & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Particularizando en los distintos puntos de equilibrio:

$$
D\boldsymbol{v}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a-1 & 0 \end{pmatrix} ,
$$

con determinante $1-a$ y traza nula. Por tanto, si $a>1$, el punto $(0,0)$ es un puerto (inestable, por tanto) y, si $0<a<1$, la linealización no permite concluir.

$$
D\boldsymbol{v}(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a+1 & 0 \end{pmatrix} ,
$$

con determinante $-a-1$ y traza nula. Por tanto, si $a>0$, con $a \neq 1$, el punto $(\pi,0)$ es un puerto (inestable).

$$
D\boldsymbol{v}\left(\arccos\left(\frac{1}{a}\right), 0\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1-a^2}{a} & 0 \end{pmatrix} ,
$$

con determinante $(a^2-1)/a$ y traza nula. Por tanto, como en este punto es $a>1$, el determinante es positivo y la traza nula, y la linealización no permite concluir.

En los casos en que el método de linealización no decide, ensayamos la integral primera como posible función de Lyapunov. Es suficiente con comprobar si, en tales casos, el punto de equilibrio es un máximo o un mínimo relativo estricto de f. En caso afirmativo, concluimos que dichos puntos son equilibrios estables, no asintóticamente estables.

Calculamos, pues, las derivadas de f.

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = -2a \operatorname{sen} 2x + 4 \operatorname{sen} x \,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4a \cos 2x + 4\cos x \,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \,, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \,.
$$

En el punto $(0,0)$ para $0<a<1$,

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0
$$

$$
Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4(1-a) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ,
$$

que es definida positiva, por tanto $(0,0)$ es un punto de mínimo local estricto para $0<a<1$.

En el otro punto no hiperbólico, si $a>1$,

$$
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\arccos\left(\frac{1}{a}\right), 0\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\arccos\left(\frac{1}{a}\right), 0\right) = 0
$$

$$
Hf\left(\arccos\left(\frac{1}{a}\right), 0\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{4(a^2-1)}{a} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} ,
$$

definida positiva, luego el punto de equilibrio es un mínimo local estricto para f.

d) El sistema diferencial equivalente a la EDO de segundo orden propuesta (que es un modelo de sistema mecánico conservativo) coincide con el sistema diferencial (29), considerando las variables:

$$
x = \theta \,, \qquad y = \theta'
$$

para el valor del parámetro $a = \omega^2$. Por lo tanto, las posiciones de equilibrio de P son:

$$0 < \omega < 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta = 0 & \text{Estable, no AE} \\ \theta = \pi & \text{Inestable} \end{cases}$$

$$\omega > 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta = 0\,, \quad \theta = \pi & \text{Inestables} \\ \theta = \arccos\left(\dfrac{1}{\omega^2}\right) & \text{Estable, no AE.} \end{cases}$$

e) Para una posición inicial $\theta(0) = \theta_0$ de P que no es de equilibrio, P oscila alrededor de la posición de equilibrio estable, deslizándose sobre el anillo:

$$\begin{aligned} 0 < \omega < 1: &\quad \text{Oscila alrededor de } \theta = 0 \\ \omega > 1: &\quad \text{Oscila alrededor de } \theta = \arccos\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \end{aligned}$$

Comentarios al ejercicio anterior

Veamos primero cómo se halla la ecuación (30) que modela el movimiento de la partícula a lo largo del anillo. La partícula se desliza a lo largo del anillo movida por las componentes tangenciales de las fuerzas que actúan sobre ella, que son la fuerza centrífuga y el peso.

La fuerza centrífuga es el producto de la masa m de la partícula por la aceleración normal que es $\omega^2 x$ como es bien sabido. Por otra parte, $\omega^2 x = \omega^2 r \operatorname{sen}\theta$.

El peso es $-mg$ siendo g la aceleración de la gravedad.

Por tanto, la componente tangencial total de estas fuerzas es (Figura 21):

$$-mg \operatorname{sen}\theta + m\omega^2 r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,.$$

Por la segunda ley de Newton, la fuerza tangencial total que actúa sobre la partícula es igual a la masa por la aceleración. La velocidad lineal de la partícula es $r\theta'(t)$. La aceleración será $r\theta''(t)$. Por tanto,

$$mr\theta''(t) = -mg \operatorname{sen}\theta + m\omega^2 r \operatorname{sen}\theta \cos\theta\,,$$

que es la ecuación (30).

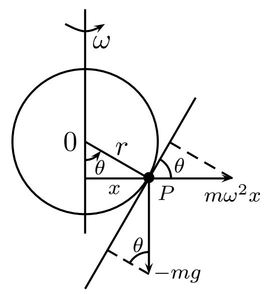


Figura 21: Equilibrio de fuerzas

Cuando la velocidad de giro ω es menor que 1, el único punto de equilibrio estable del sistema equivalente a la ecuación (30) es $(\theta, \theta') = (0,0)$. El diagrama de fases puede verse en la Figura 22.

Si la velocidad angular ω es mayor que 1, el punto de equilibrio $(0,0)$ se hace inestable (un puerto) y aparece un nuevo punto de equilibrio estable que es

$$\left(\arccos\left(\frac{1}{\omega^2}\right), 0\right)\,.$$

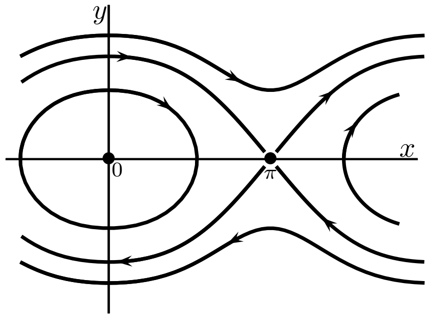


Figura 22: Diagrama de fases del sistema $x' = y$, $y' = \operatorname{sen} x(a \cos x - 1)$ para $a < 1$

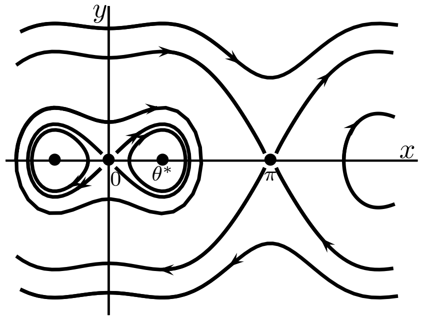


Figura 23: Diagrama de fases del sistema $x' = y$, $y' = \operatorname{sen} x(a \cos x - 1)$ para $a > 1$

La Figura 23 muestra el diagrama de fases para $a = 2$.

En la Figura 24 se muestra cómo oscila la partícula en torno a la posición de equilibrio estable en los casos $\omega < 1$ y $\omega > 1$. Para ilustrar el caso $\omega > 1$ se ha elegido un valor de $\omega \approx \sqrt{2}$, por lo que dicho gráfico es una aproximación que no se corresponde necesariamente con los cálculos exactos.

Si la velocidad angular ω aumenta mucho, entonces la posición de equilibrio θ^* tiende al valor $\arccos 0 = \pi/2$.

Podemos interpretar estos datos diciendo que, para $\omega < 1$, la influencia de la fuerza centrífuga frente al peso de la partícula es despreciable pero, cuando $\omega > 1$, la influencia de la fuerza centrífuga aumenta frente al peso.

Figura 24: Oscilación de la partícula en torno a las posiciones de equilibrio

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 2
(2 puntos)

Sea A una matriz $n \times n$, real y constante, que satisface la condición

$$A^2 = \alpha A \quad , \quad \alpha \neq 0 \quad \text{constante real conocida.}$$

a) Calcular e^{tA}. Hallar la solución $X(t)$ del problema de valor inicial:

$$X'(t) = AX(t) \quad ; \quad X(0) = X_0 \, , \, X_0 \in \mathbb{R}^n \, .$$

Indicación: $e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \cdots + \frac{u^m}{m!} + \cdots$. **(0,75 puntos)**

b) Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales existe $\lim_{t\to+\infty} X(t)$, especificando el valor de dicho límite. **(0,25 puntos)**

Se considera la matriz

$$B = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix} \quad , \quad b \in \mathbb{R} \, , \, b \neq 0 \, .$$

c) Hallar la solución $Y(t)$ del problema de valor inicial:

$$Y'(t) = BY(t) \quad ; \quad Y(0) = U_0 \, , \, U_0 \in \mathbb{R}^4 \, .$$

Determinar los valores de $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, para los cuales existe $\lim_{t\to+\infty} Y(t)$. **(0,5 puntos)**

d) Para los valores de b determinados en el apartado **c),** hallar todas las condiciones iniciales $U_0 \in \mathbb{R}^4$ para las cuales se verifica que $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \mathbf{0}$. Si dichas condiciones iniciales constituyen un espacio vectorial, especifíquese su dimensión. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) Se tiene:

$$A^2 = \alpha A \quad \Rightarrow \quad A^3 = A^2 A = \alpha^2 A \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad A^m = \alpha^{m-1} A \, ,$$

de donde:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= I + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \cdots + \frac{t^m}{m!} A^m + \cdots \\ &= I + \frac{t}{1!} A + \frac{t^2}{2!} \alpha A + \frac{t^3}{3!} \alpha^2 A + \cdots + \frac{t^m}{m!} \alpha^{m-1} A + \cdots \\ &= I + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{t\alpha}{1!} + \frac{t^2\alpha^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m\alpha^m}{m!} + \cdots \right) A \\ &= I + \frac{1}{\alpha} (e^{t\alpha} - 1) A \, . \end{aligned}$$

La solución del sistema diferencial es

$$X(t) = e^{tA} X_0 = \left(I + \frac{e^{t\alpha} - 1}{\alpha} \, A \right) X_0 \, .$$

b) Existe $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ si y solo si $\alpha < 0$ y entonces

$$\lim_{t \to +\infty} X(t) = \left(I - \frac{1}{\alpha} \, A \right) X_0 \, .$$

c) Se verifica $B^2 = 4bB$. Se pueden aplicar por tanto los resultados de los apartados **a)** y **b)** con $\alpha = 4b$. La solución del sistema diferencial es

$$Y(t) = e^{tB} Y(0) = \left(I_4 + \frac{e^{4bt} - 1}{4b} \, B \right) U_0$$

siendo I_4 la matriz identidad 4×4.

Existe $\lim_{t \to +\infty} Y(t)$ si y solo si $b < 0$ y entonces:

$$\lim_{t \to +\infty} Y(t) = \left(I_4 - \frac{1}{4b} \, B \right) U_0 \, .$$

d) Hay que hallar las soluciones U_0 del sistema

$$\begin{aligned}
& \left(I_4 - \frac{1}{4b} \, B \right) U_0 = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \left(4I_4 - \frac{1}{b} \, B \right) U_0 = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad x = y = z = u \\
\Rightarrow \quad & U_0 = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad \lambda \in \mathbb{R} \, .
\end{aligned}$$

Se trata del espacio vectorial

$$\ker \left(4I_4 - \frac{1}{b} \, B \right) , \quad \text{con} \quad \dim \ker \left(4I_4 - \frac{1}{b} \, B \right) = 1 \, .$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**....................................

EJERCICIO 3
(2 puntos)

Hallar los autovalores y las autofunciones del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} x^2X''(x) + 3xX'(x) = \lambda X(x)\,, & 1 < x < e^\pi \\ X(1) = X(e^\pi) = 0\,. \end{cases}$$

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

La EDO es de Euler. Hacemos el cambio de variable independiente $x \mapsto \sigma$ siendo $x = e^\sigma$. Entonces,

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0\,, \qquad x = e^\pi \quad \Rightarrow \quad \sigma = \pi\,.$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= \frac{dX}{d\sigma}\,\frac{d\sigma}{dx} = e^{-\sigma}\,\frac{dX}{d\sigma} \\ \frac{d^2X}{dx^2} &= e^{-\sigma}\,\frac{d}{d\sigma}\left(e^{-\sigma}\,\frac{dX}{d\sigma}\right) = -e^{-2\sigma}\,\frac{dX}{d\sigma} + e^{-2\sigma}\,\frac{d^2X}{d\sigma^2}\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDO:

$$\frac{d^2X}{d\sigma^2} - \frac{dX}{d\sigma} + 3\,\frac{dX}{d\sigma} = \lambda X$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{d^2X}{d\sigma^2} + 2\,\dfrac{dX}{d\sigma} - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0\,. \end{cases}$$

La ecuación característica asociada es

$$\rho^2 + 2\rho - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}\,.$$

(a) Si $\lambda = -1$, entonces $\rho = -1$ es raíz doble. La solución general de la EDO es

$$X(\sigma) = c_1e^{-\sigma} + c_2\sigma e^{-\sigma}\,.$$

Imponiendo las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} &X(0) = c_1 = 0 \\ &X(\pi) = c_2\pi e^{-\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0\,, \end{aligned}$$

y se obtendría $X(\sigma) \equiv 0$, que no es autofunción.

(b) Si $\lambda > -1$, entonces las raíces de la ecuación característica son $\rho = -1 \pm \sqrt{1+\lambda}$ reales. La solución general de la EDO es

$$X(\sigma) = c_1e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\sigma} + c_2e^{(-1+\sqrt{1+\lambda})\sigma}\,.$$

Imponemos las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} X(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ X(\pi) &= c_1 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\pi} + c_2 e^{(-1-\sqrt{1+\lambda})\pi} = 0\,, \end{aligned}$$

de donde $c_1 = c_2 = 0$ y $X(\sigma) \equiv 0$, que no es autofunción.

(c) Si $\lambda < -1$, se tiene $1+\lambda < 0$, luego $1+\lambda = -|1+\lambda|$, y las raíces de la ecuación característica son $\rho = -1 \pm i\sqrt{|1+\lambda|}$. La solución general de la EDO es

$$X(\sigma) = c_1 e^{-\sigma} \cos \sqrt{|1+\lambda|}\sigma + c_2 e^{-\sigma} \operatorname{sen} \sqrt{|1+\lambda|}\sigma\,.$$

Imponemos las condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} X(0) &= c_1 = 0 \\ X(\pi) &= c_2 e^{-\pi} \operatorname{sen} \pi\sqrt{|1+\lambda|} = 0\,, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} &\sqrt{|1+\lambda|} = n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \\ \Rightarrow \quad &|1+\lambda| = n^2 \quad \Rightarrow \quad 1+\lambda_n = -n^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = -n^2 - 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \end{aligned}$$

Por tanto, los autovalores son $\lambda_n = -n^2 - 1$ para $n = 1, 2, \ldots$ y las autofunciones:

$$\begin{aligned} &X_n(\sigma) = e^{-\sigma} \operatorname{sen} n\sigma \\ \Rightarrow \quad &X_n(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen}(n \log x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \end{aligned}$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 4
(3 puntos)

a) Se considera el sistema diferencial lineal con coeficientes constantes

$$X'(t) = AX(t) \tag{31}$$

en el que A es una matriz real cuadrada 2×2 constante y con autovalores simples (reales o complejos).

Se introducen las notaciones:

- det = determinante de la matriz A.
- tr = traza de la matriz A.

a.1) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. Cada casilla errónea resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado. Las casillas en blanco no puntúan. La calificación mínima de este apartado es de 0 puntos. La notación AE significa *asintóticamente estable.* **(1 punto)**

	det > 0 tr > 0	det > 0 tr < 0	det > 0 tr = 0	det < 0	det = 0 tr > 0	det = 0 tr < 0
(31) tiene un único punto de equilibrio en el origen, que además es AE	No	Sí	No	No	No	No
(31) tiene un único punto de equilibrio en el origen, que además es estable, no AE	No	No	Sí	No	No	No
(31) es un puerto	No	No	No	Sí	No	No
Existe una recta formada por puntos de equilibrio de (31), todos inestables	No	No	No	No	Sí	No
(31) tiene un único punto de equilibrio en el origen, inestable pero no puerto	Sí	No	No	No	No	No

a.2) Rellenar el siguiente cuadro escribiendo en cada casilla la clasificación que corresponda al sistema (31), según los valores especificados de det y tr: nodo, foco, centro, puerto, indicando además en su caso si es estable o inestable. Alguna casilla puede contener más de una clasificación. Cada casilla errónea o incompleta resta 0,1 puntos a la calificación de este apartado. Las casillas en blanco no puntúan. La calificación mínima de este apartado es de 0 puntos. **(0,5 puntos)**

	det > 0	det < 0
tr > 0	Nodo inestable Foco inestable	Puerto
tr < 0	Nodo estable Foco estable	Puerto
tr = 0	Centro	Puerto

b) Sea M una matriz real cuadrada constante 2×2, con autovalores imaginarios puros. Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano, definido y de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$:

$$x'(t) = v_1(x, y) \quad ; \quad y'(t) = v_2(x, y) \tag{32}$$

para el cual se verifica que $\boldsymbol{x}^*$ es un punto de equilibrio y además $M = D(v_1, v_2)(\boldsymbol{x}^*)$ (es decir, M es la matriz jacobiana del sistema (32) en el punto $\boldsymbol{x}^*$).

Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes. Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 1 punto. La calificación mínima de este apartado es de 0 puntos. Las respuestas en blanco no puntúan. **(1 punto)**

	V	F
$\boldsymbol{x}^*$ es un punto de equilibrio de (32) que forzosamente es estable, pero no es asintóticamente estable		**F**
El origen es el único punto de equilibrio del sistema diferencial lineal $X'(t) = MX(t)$, que además es estable pero no es asintóticamente estable	**V**	
Siempre existen soluciones periódicas para el sistema diferencial (32)		**F**
Todas las soluciones del sistema diferencial lineal $X'(t) = MX(t)$ son acotadas	**V**	
Todas las soluciones del sistema diferencial (32) son acotadas		**F**

c) Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano, definido y de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$:

$$x'(t) = f_1(x, y) \quad ; \quad y'(t) = f_2(x, y)\,. \tag{33}$$

Elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes, referidas al sistema diferencial (33). Cada respuesta errónea resta 0,2 puntos a la calificación de este apartado, hasta un máximo de 0,5 puntos. La calificación mínima de este apartado es de 0 puntos. Las respuestas en blanco no puntúan. **(0,5 puntos)**

	V	F
Si (33) solo tiene un punto de equilibrio, que además es asintóticamente estable, entonces no existen órbitas cerradas para (33)		**F**
Si existen órbitas cerradas para (33), entonces (33) no tiene puntos de equilibrio que sean asintóticamente estables		**F**
Si F es un conjunto compacto y positivamente invariante para (33) que no contiene puntos de equilibrio de (33), entonces F contiene alguna órbita cerrada de (33)	**V**	
Si (33) tiene un punto de equilibrio que es estable pero no es asintóticamente estable, entonces dicho punto de equilibrio no es hiperbólico	**V**	
Si existe una función de Lyapunov no estricta para un punto de equilibrio, entonces dicho punto de equilibrio no puede ser asintóticamente estable		**F**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 1
(3 puntos)

En este ejercicio se plantean diversos modelos para representar el crecimiento en volumen de un tumor.

- **Modelo 1**.

El crecimiento de un tumor en un cultivo de laboratorio se corresponde con la E.D.O.:

$$V_1'(t) = \lambda V_1(t) \quad , \quad V_1(0) = V_0 \quad , \quad \lambda > 0 \,(\text{constante}) \tag{34}$$

en la que $V_1(t)$ representa el volumen del tumor en el instante $t \geq 0$.

a) Calcular $V_1(t)$, $t > 0$. Calcular el tiempo que tarda el tumor en duplicar su volumen inicial. **(0,5 puntos)**

- **Modelo 2**.

Experimentalmente no se observa un crecimiento indefinido de los tumores, por lo que un modelo más realista consiste en modificar el modelo (34), suponiendo que la tasa de crecimiento no es constante, sino que decrece exponencialmente con t:

$$V_2'(t) = \lambda e^{-\alpha t} V_2(t) \quad , \quad V_2(0) = V_0 \quad , \quad \lambda > 0 \,,\, \alpha > 0 \,(\text{constantes})$$

b) Calcular $V_2(t)$, $t > 0$. Calcular el volumen final del tumor. **(0,5 puntos)**

c) Determinar la relación que han de satisfacer las constantes λ, α, para que el tumor pueda duplicar su volumen inicial. En tal caso, calcular el tiempo que tarda en alcanzar dicha duplicación de volumen. **(0,5 puntos)**

- **Modelo 3**.

El denominado *modelo de Gompertz* es un modelo experimentalmente validado para representar el crecimiento de tumores:

$$V_3'(t) = -\beta V_3(t) \log\left(\frac{V_3(t)}{V^*}\right) \quad , \quad V_3(0) = V_0 \quad , \quad \beta > 0 \,,\, V^* > 0 \,(\text{constantes})$$

d) Calcular $V_3(t)$, $t > 0$. Calcular el volumen final del tumor. **(1 punto)**

e) Calcular los valores de $V_0 > 0$ para los cuales el tumor puede duplicar su volumen inicial. En tal caso, calcular el tiempo que tarda en alcanzar dicha duplicación de volumen. **(0,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

- **Modelo 1.**

a) La solución del problema de valor inicial (34) es:

$$V_1(t) = V_0 e^{\lambda t} \quad , \quad t \geq 0\,.$$

El tiempo t_1^* que tarda el tumor en duplicar su volumen se obtiene resolviendo la ecuación en la incógnita t:

$$V_1(t) = 2V_0 = V_0 e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad t_1^* = \frac{\log 2}{\lambda} > 0\,.$$

Obsérvese que $\lim_{t\to+\infty} V_1(t) = +\infty$, lo que significa que el tumor puede aumentar su volumen indefinidamente.

- **Modelo 2.**

b) En este modelo se trata de resolver una E.D.O. de variables separables muy sencilla:

$$\frac{V_2'(t)}{V_2(t)} = \lambda e^{-\alpha t} \quad \Rightarrow \quad V_2(t) = K e^{-(\lambda/\alpha)e^{-\alpha t}}\,.$$

El valor de la constante K se determina imponiendo la condición inicial:

$$V_2(0) = V_0 = K e^{-\lambda/\alpha} \quad \Rightarrow \quad K = V_0 e^{\lambda/\alpha}\,.$$

Por lo tanto, la solución es:

$$V_2(t) = V_0 e^{(\lambda/\alpha)(1-e^{-\alpha t})} \quad , \quad t \geq 0\,.$$

El volumen final del tumor es:

$$V_{2\infty} = \lim_{t\to+\infty} V_2(t) = V_0 e^{\lambda/\alpha}\,.$$

En este modelo el tumor no crece indefinidamente, pero su volumen final depende del volumen inicial.

c) El tiempo t_2^* que tarda el tumor en duplicar su volumen inicial se obtiene resolviendo la ecuación:

$$V_2(t) = 2V_0 = V_0 e^{(\lambda/\alpha)(1-e^{-\alpha t})} \Rightarrow t_2^* = -\frac{1}{\alpha}\log\left(1 - \frac{\alpha \log 2}{\lambda}\right).$$

De esta última expresión se deduce que t_2^* es un número real positivo si y solo si $\alpha(\log 2)/\lambda < 1$. Por lo tanto, el tumor puede duplicar su volumen si y solo si

$$\frac{\lambda}{\alpha} > \log 2\,.$$

- **Modelo 3.**

d) Se trata de resolver una E.D.O. de variables separables:

$$\frac{V_3'(t)}{V_3(t)\log(V_3(t)/V^*)} = -\beta\,.$$

Efectuamos el cálculo de la integral del primer miembro con ayuda del cambio de variable $\sigma = \log(V_3/V^*)$:

$$\int \frac{dV_3}{V_3 \log(V_3/V^*)} = \int \frac{d\sigma}{\sigma} = \log|\sigma| = \log\left|\log\left(\frac{V_3}{V^*}\right)\right|.$$

Resulta:

$$\log\left|\log\left(\frac{V_3}{V^*}\right)\right| = -\beta t + K_1 \quad \Rightarrow \quad V_3(t) = V^* e^{Ke^{-\beta t}}\,.$$

Determinamos la constante K a partir de la condición inicial:

$$K = \log\left(\frac{V_0}{V^*}\right) \;\Rightarrow\; V_3(t) = V^* e^{[\log(V_0/V^*)]e^{-\beta t}} = V^* \left(\frac{V_0}{V^*}\right)^{e^{-\beta t}}.$$

El volumen final del tumor es:

$$V_{3\infty} = \lim_{t\to+\infty} V_3(t) = V^*.$$

En el modelo de Gompertz el volumen final del tumor es fijo y no depende de la condición inicial.

e) El tiempo que tarda el tumor en duplicar su volumen se obtiene resolviendo la ecuación:

$$V_3(t) = 2V_0 = V^* e^{[\log(V_0/V^*)]e^{-\beta t}}.$$

De aquí se obtiene:

$$e^{-\beta t} = \frac{\log(2V_0/V^*)}{\log(V_0/V^*)} = \frac{\log 2 + \log(V_0/V^*)}{\log(V_0/V^*)} = 1 + \frac{\log 2}{\log(V_0/V^*)}$$

y por lo tanto:

$$t_3^* = -\frac{1}{\beta}\log\left(1 + \frac{\log 2}{\log(V_0/V^*)}\right).$$

La condición necesaria y suficiente para que t_3^* sea un número real positivo es:

$$\begin{aligned}
0 < 1 + \frac{\log 2}{\log(V_0/V^*)} < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad -1 < \frac{\log 2}{\log(V_0/V^*)} < 0 \\
\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\log 2} < \frac{1}{\log(V_0/V^*)} < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\log 2} > \frac{1}{-\log(V_0/V^*)} \\
\Leftrightarrow \quad -\log(V_0/V^*) > \log 2 \quad &\Leftrightarrow \quad \log(V_0/V^*) < -\log 2 = \log\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad V_0/V^* < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad V_0 < \frac{V^*}{2}.
\end{aligned}$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2015-2016	**EXAMEN JULIO (8.07.2016)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula......................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 2
(4 puntos)

Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano, dependiente del parámetro real $a > 0$, definido en el primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$\begin{cases} x'(t) = x(1 - x - ay) \\ y'(t) = y(1 - ax - y) . \end{cases} \tag{35}$$

Las cuestiones **a)**, **b)** y **c)** se refieren al sistema (35) para valores del parámetro $a > 0$, $a \neq 1$.

a) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los valores de a ($a \neq 1$) y la segunda con los correspondientes puntos de equilibrio de (35). Cada casilla correcta contabiliza $\alpha > 0$ puntos y cada casilla errónea resta α puntos a la calificación de este apartado. La calificación mínima de este cuadro es de 0 puntos. Las casillas en blanco no puntúan.

La notación AE significa *asintóticamente estable.* **(1 punto)**

Valores de a	Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	AE	Estable no AE	Inestable

b) Dibujar el campo vectorial asociado a (35) sobre los ejes OX, OY en el primer cuadrante, y sobre la recta bisectriz del primer cuadrante. Decidir razonadamente la posible existencia o no de soluciones periódicas no triviales para el sistema (35), en el primer cuadrante. **(0,5 puntos)**

c) Dibujar las distintas órbitas de (35) en el espacio de fases (primer cuadrante), para los diferentes valores del parámetro $a > 0$, $a \neq 1$. **(1 punto)**

d) Se considera el sistema (35) para el valor del parámetro $a = 1$. Hallar los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov. Decidir razonadamente la posible existencia o no de soluciones periódicas no triviales para el sistema (35) en el primer cuadrante. Dibujar las distintas órbitas en el espacio de fases (primer cuadrante). **(1 punto)**

Se supone que el sistema diferencial (35) es un modelo simplificado de la dinámica de dos especies animales de densidades de población $x(t)$, $y(t)$ (en unidades de millar), que habitan en un mismo ecosistema y que compiten por los mismos recursos.

e) Determinar los valores de $a > 0$, $a \neq 1$, para los cuales ambas poblaciones coexisten a largo plazo, cualquiera que sea la condición inicial $x(0) > 0$, $y(0) > 0$. En tal caso, determinar los valores asintóticos finales (es decir, cuando $t \to +\infty$) de ambas poblaciones. **(0,25 puntos)**

f) Para los valores de $a > 0$, $a \neq 1$, no incluidos en el apartado **e),** determinar el conjunto de valores iniciales $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, para los cuales la población $y(t)$ se extingue a largo plazo. En este caso, determinar el valor asintótico final (es decir, cuando $t \to +\infty$) de la población $x(t)$. **(0,25 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otras dos hojas más)

a) Los puntos de equilibrio son los que anulan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x(1 - x - ay) = 0 \\ y(1 - ax - y) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación se anula si $x = 0$ o si $x = 1 - ay$. Sustituyendo $x = 0$ en la segunda ecuación, resulta $y(1 - y) = 0$, luego $y = 0$ o $y = 1$, y resultan los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

Sustituyendo $x = 1 - ay$ en la segunda ecuación, se tiene:

$$y(1 - a + a^2 y - y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y\left[(1 - a) + (a^2 - 1)y\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y = 0 & \text{(y se obtiene el punto de equilibrio } (1,0)) \\ y = \dfrac{a-1}{a^2-1} = \dfrac{1}{a+1} & \text{(ya que } a \neq 1) \,. \end{cases}$$

En este último caso, resulta:

$$x = 1 - \frac{a}{a+1} = \frac{1}{a+1} \,,$$

y es punto de equilibrio

$$\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \right) .$$

Para determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio hallados, calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial:

$$D\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - ay & -ax \\ -ay & 1 - 2y - ax \end{pmatrix} .$$

Particularizando en cada uno de los puntos:

$$D\boldsymbol{v}(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

luego el punto $(0, 0)$ es una fuente (por tanto, inestable) para todo valor de a.

$$D\boldsymbol{v}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 - a & 0 \\ -a & -1 \end{pmatrix} ,$$

luego, si $a > 1$, el punto $(0,1)$ es un sumidero y, si $0 < a < 1$, el punto es un puerto.

$$D\boldsymbol{v}(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & -a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} .$$

Por tanto, si $a > 1$, el punto $(1,0)$ es un sumidero y, si $0 < a < 1$, el punto es un puerto. Finalmente,

$$D\boldsymbol{v}\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right) = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{a}{a+1} & \dfrac{-a}{a+1} \\ \dfrac{-a}{a+1} & 1 - \dfrac{2}{a+1} - \dfrac{a}{a+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{a+1} & \dfrac{-a}{a+1} \\ \dfrac{-a}{a+1} & \dfrac{-1}{a+1} \end{pmatrix} .$$

El determinante de esta matriz vale:

$$\det = \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a^2}{(a+1)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{(a+1)^2} = \frac{1-a}{1+a}$$

y la traza:

$$\mathrm{tr} = -\frac{2}{a+1} < 0 \qquad \text{para todo } a > 0.$$

Por tanto, si $a > 1$, el determinante es negativo y el punto es un puerto. Si $0 < a < 1$, el determinante es positivo y la traza negativa luego el punto es un sumidero.

El cuadro que se pide es por tanto:

Valores de a	Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	AE	Estable no AE	Inestable
Todos	$(0,0)$	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí
$0 < a < 1$	$(0,1)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$a > 1$	$(0,1)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No
$0 < a < 1$	$(1,0)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$a > 1$	$(1,0)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No
$0 < a < 1$	$\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No
$a > 1$	$\left(\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí

b) El campo vectorial sobre el eje OX es

$$\boldsymbol{v}(\alpha, 0) = (\alpha(1-\alpha), 0) ,$$

sobre el eje OY:

$$\boldsymbol{v}(0, \beta) = (0, \beta(1-\beta)) ,$$

y sobre la bisectriz $x = y$:

$$\boldsymbol{v}(\alpha, \alpha) = (\alpha(1 - \alpha - a\alpha), \alpha(1 - a\alpha - \alpha)) = \alpha\,[1 - (a+1)\alpha]\,(1,1)$$

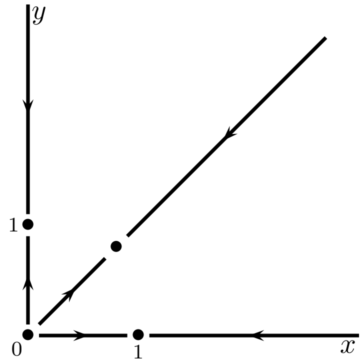
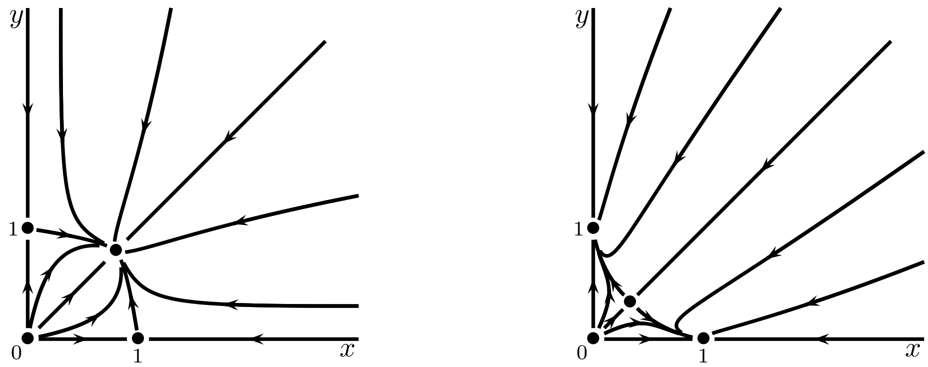


Figura 25: Campo vectorial en los ejes y la recta $x = y$



$0 < a < 1$ $\qquad$ $a > 1$

Figura 26: Diagrama de fases del sistema $x' = x(1 - x - ay)$, $y' = y(1 - ax - y)$ para $a > 0$

para todos $\alpha \geq 0$.

Se deduce del teorema de Poincaré que no existen órbitas cerradas.

c) Los diagramas de fases en los casos $0 < a < 1$ y $a > 1$ se muestran en la Figura 26.

d) Si $a = 1$, el sistema diferencial es:

$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y) \\ y' = y(1 - x - y)\,. \end{cases}$$

Claramente, el origen es un punto de equilibrio. Además lo son todos los puntos de la recta $x+y = 1$.

En el primer cuadrante $x, y > 0$ existe una integral primera. Aplicando la regla de la cadena a lo largo de una trayectoria arbitraria, se tiene:

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\,y' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \log y = \log x + \log K \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = K'\,,$$

y la integral primera es

$$f(x, y) := \frac{y}{x}\,.$$

Sus curvas de nivel son las rectas $y = mx$. Como el origen era una fuente, se obtiene fácilmente el diagrama de la Figura 27.

Los puntos de la recta $x+y = 1$ en el primer cuadrante son estables, no asintóticamente estables.

e) A la vista de los diagramas de fases del apartado **c),** las poblaciones solo coexisten si $0 < a < 1$.

Para cualquier condición inicial $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, la solución $(x(t), y(t))$ correspondiente satisface:

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = \left(\frac{1}{a+1}\,,\ \frac{1}{a+1}\right)\,.$$

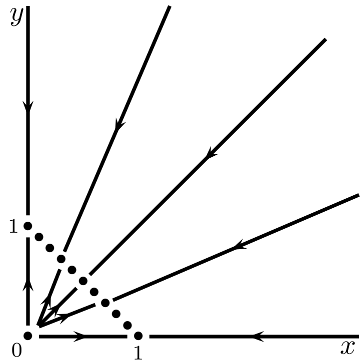


Figura 27: Diagrama de fases del sistema $x' = x(1-x-y)$, $y' = y(1-x-y)$

f) En el caso $a > 1$, la población $y(t)$ se extingue a largo plazo si $x(0) > 0$ y además $0 < y(0) < x(0)$. En este caso:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 1\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2015-2016	**EXAMEN JULIO (8.07.2016)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula...................... **Grupo**....................................

EJERCICIO 3
(3 puntos)

Se considera el siguiente problema de valores iniciales y de contorno para la ecuación de ondas, con rozamiento dependiente de un parámetro b, $0 < b \leq 1$:

$$P_b \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2b\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, \quad 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0\,, \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1 - 4\cos x)\,\mathrm{sen}\,x\,, \quad 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

a) Escribir el problema de autovalores asociado a P_b. Determinar los autovalores y las autofunciones. **(0,5 puntos)**

b) Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución $u_b(x,t)$ del problema P_b, para los valores del parámetro $0 < b < 1$. **(1 punto)**

c) Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución $u_1(x,t)$ del problema P_1, que corresponde al valor del parámetro $b = 1$. **(1 punto)**

d) Calcular:

$$u_1(x,t) - \lim_{b \to 1} u_b(x,t)\,. \qquad \textbf{(0,5 puntos)}$$

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

Buscamos soluciones de la EDP y condiciones de frontera homogéneas de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)\,.$$

Sustituyendo en la EDP:

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t) + 2bX(x)T'(t)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} + 2b\,\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda\,.$$

De aquí resultan las ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) = \lambda X(x)$$
$$T''(t) + 2bT'(t) = \lambda T(t)\,.$$

a) Se obtiene el problema de autovalores y autofunciones:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son bien conocidas: autovalores $\lambda_n : -n^2$ y autofunciones $X_n(x) := \operatorname{sen} nx$ para $n = 1, 2, \ldots$.

b) Sustituyendo los valores hallados de λ_n en la EDO en $T(t)$ resulta:

$$\begin{aligned} & T''(t) + 2bT'(t) = -n^2 T(t) \\ \Rightarrow \quad & T''(t) + 2bT'(t) + n^2 T(t) = 0\,. \end{aligned}$$

Su ecuación característica es

$$r^2 + 2br + n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -b \pm \sqrt{b^2 - n^2} = -b \pm i\sqrt{n^2 - b^2}\,,$$

teniendo en cuenta que $0 < b < 1$. Por tanto, la solución general de la EDO en $T(t)$ es, para cada $n = 1, 2, \ldots$:

$$T_n(t) = e^{-bt}\left[A_n \cos\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right)\right]\,.$$

Ensayamos la solución

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-bt}\left[A_n \cos\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right)\right] \operatorname{sen} nx\,. \end{aligned}$$

Imponemos la condición inicial en u:

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)\,,$$

de donde:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-bt} B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right) \operatorname{sen} nx\,.$$

Derivando:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-be^{-bt} B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right) + e^{-bt} B_n \cos\left(\sqrt{n^2 - b^2}\, t\right)\right] \operatorname{sen} nx\,.$$

Imponemos la condición inicial en la derivada de u respecto de t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{n^2 - b^2} \operatorname{sen} nx \\ &= (1 - 4\cos x) \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} 2x \\ \Rightarrow \quad & B_1 \sqrt{1 - b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad B_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \\ & B_2 \sqrt{4 - b^2} = -2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = -\frac{2}{\sqrt{4 - b^2}} \\ & B_n = 0 \quad (n = 3, 4, \ldots)\,. \end{aligned}$$

La solución buscada es, por tanto,

$$u_b(x,t) = e^{-bt}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1 - b^2}\, t\right) \operatorname{sen} x - \frac{2}{\sqrt{4 - b^2}} \operatorname{sen}\left(\sqrt{4 - b^2}\, t\right) \operatorname{sen} 2x\right]$$

para $0 < b < 1$.

c) El problema para $b = 1$ es

$$P_1 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,, & 0 < x < \pi\,, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0\,, \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = (1 - 4\cos x)\operatorname{sen} x\,, \quad 0 < x < \pi\,. \end{cases}$$

El problema de autovalores y autofunciones es el mismo del apartado **a)**, con soluciones $\lambda_n = -n^2$, $X_n(x) = \operatorname{sen} nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

La EDO en $T(t)$ es:

$$\begin{aligned} & T''(t) + 2T'(t) = -n^2 T(t) \\ \Rightarrow \quad & T''(t) + 2T'(t) + n^2 T(t) = 0\,, \end{aligned}$$

con ecuación característica:

$$r^2 + 2r + n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -1 \pm \sqrt{1 - n^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = -1 \quad \text{(doble) si } n = 1 \\ r = -1 \pm i\sqrt{n^2 - 1} \quad (n = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

Las respectivas soluciones generales de las ecuaciones diferenciales son:

$$\begin{aligned} T_1(t) &= e^{-t}(A_1 + B_1 t) \\ T_n(t) &= e^{-t}\left[A_n \cos\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right)\right]\,. \end{aligned}$$

Ensayamos la solución:

$$u(x,t) = e^{-t}(A_1 + B_1 t)\operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-t}\left[A_n \cos\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right)\right]\operatorname{sen} nx\,.$$

Imponiendo la condición inicial en u:

$$0 = u(x,0) = A_1 \operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{sen} nx \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Sustituyendo,

$$u(x,t) = B_1 t e^{-t}\operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-t} B_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right)\operatorname{sen} nx\,.$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= B_1(-te^{-t} + e^{-t})\operatorname{sen} x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} B_n\left[-e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right) + e^{-t}\sqrt{n^2 - 1}\cos\left(\sqrt{n^2 - 1}\,t\right)\right]\operatorname{sen} nx\,. \end{aligned}$$

Imponiendo la condición inicial a la derivada de u,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = B_1 \operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \sqrt{n^2 - 1}\operatorname{sen} nx = \operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x \\ & \quad \Rightarrow \quad B_1 = 1 \\ & \qquad\qquad B_2\sqrt{3} = -2 \quad \Rightarrow \quad B_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ & \qquad\qquad B_n = 0 \quad (n = 3, 4, \ldots)\,. \end{aligned}$$

La solución de P_1 es, por tanto,

$$u_1(x,t) = te^{-t}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\sqrt{3}}\, e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)\operatorname{sen} 2x\,.$$

d) Calculamos:

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to 1} u_b(x,t) &= \lim_{b\to 1} e^{-bt}\left[\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-b^2}\,t\right)\operatorname{sen} x - \frac{2}{\sqrt{4-b^2}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{4-b^2}\,t\right)\operatorname{sen} 2x\right] \\
&= e^{-t}\left[\lim_{b\to 1}\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-b^2}\,t\right)}{\sqrt{1-b^2}}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)\operatorname{sen} 2x\right] \\
&= e^{-t}\left[\lim_{b\to 1}\frac{t\operatorname{sen}\left(\sqrt{1-b^2}\,t\right)}{t\sqrt{1-b^2}}\operatorname{sen} x - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)\operatorname{sen} 2x\right] \\
&= e^{-t}\left[t\operatorname{sen} x - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{3}\,t\right)\operatorname{sen} 2x\right] = u_1(x,t)\,.
\end{aligned}$$

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula......................**Grupo**...................................

EJERCICIO 1
(3 puntos)

Modelos matemáticos para la difusión de una información.

- **Modelo logístico.**

En un colectivo formado por un número fijo y suficientemente grande $N^* > 0$ de individuos se difunde una cierta información, que en el instante $t = 0$ es conocida por un único individuo del colectivo.

Si se supone que la velocidad de difusión de la información en el colectivo es proporcional al número de posibles encuentros entre los individuos que conocen la información y los que aún no la conocen, el *modelo logístico* que determina el número de individuos $N_1(t)$ que conocen la información en el instante $t > 0$ se formula como:

$$N_1'(t) = N_1(t)(N^* - N_1(t)) \quad ; \quad N_1(0) = 1\,.$$

a) Obtener $N_1(t)$, $t > 0$. **(1 punto)**

b) Calcular la *tasa de imitación* T_1, que se define como el tiempo que transcurre desde que el 20 % del total de individuos del colectivo conoce la información hasta que dicha información es conocida por el 80 % del total de individuos del colectivo. **(0,5 puntos)**

- **Modelo de Bass.**

Este modelo modifica el modelo anterior incorporando factores externos (p.ej., medios de comunicación), que aumentan la velocidad de difusión proporcionalmente al número de individuos que no conocen la información en cada instante. Suponiendo que inicialmente ningún individuo del colectivo conoce la información, el *modelo de Bass* se formula como:

$$N_2'(t) = N_2(t)(N^* - N_2(t)) + (N^* - N_2(t)) \quad ; \quad N_2(0) = 0\,.$$

c) Obtener $N_2(t)$, $t > 0$. **(0,75 puntos)**

d) Calcular la tasa de imitación T_2 para este modelo. **(0,5 puntos)**

e) Decidir razonadamente cuál de las dos tasas de imitación es mayor. **(0,25 puntos)**

Nota.– Para simplificar los cálculos, en ambos modelos se han elegido todas las constantes de proporcionalidad iguales a la unidad.

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) Se trata de una ecuación diferencial separable:

$$\frac{N_1'(t)}{N_1(t)(N^* - N_1(t))} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}N_1}{N_1(N^* - N_1)} = t + k\,.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{N_1(N^*-N_1)} = \frac{1/N^*}{N_1} + \frac{1/N^*}{N^*-N_1} \ ,$$

de donde:

$$\begin{aligned}
&\int \left(\frac{1/N^*}{N_1} + \frac{1/N^*}{N^*-N_1} \right) \mathrm{d}N_1 = t+k \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{N^*}\log N_1 - \frac{1}{N^*}\log(N^*-N_1) = t+k \\
\Rightarrow \quad & \log \frac{N_1}{N^*-N_1} = N^*t + k \\
\Rightarrow \quad & \frac{N_1}{N^*-N_1} = \underbrace{ke^{N^*t}}_{=:\beta} \ .
\end{aligned}$$

Imponemos la condición inicial:

$$t=0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{N^*-1} \ ,$$

luego:

$$N_1 = \beta(N^*-N_1) \quad \Rightarrow \quad N_1(1+\beta) = \beta N^* \quad \Rightarrow \quad N_1 = \frac{\beta N^*}{1+\beta}$$

$$\Rightarrow \quad N_1(t) = \frac{kN^*e^{N^*t}}{1+ke^{N^*t}} = \frac{\dfrac{N^*}{N^*-1}\,e^{N^*t}}{1+\dfrac{1}{N^*-1}\,e^{N^*t}} = \frac{N^*e^{N^*t}}{N^*-1+e^{N^*t}} = \frac{N^*}{1+(N^*-1)e^{-N^*t}} \ .$$

b) Despejamos t:

$$\begin{aligned}
& 1+(N^*-1)e^{-N^*t} = \frac{N^*}{N_1(t)} \\
\Rightarrow \quad & (N^*-1)e^{-N^*t} = \frac{N^*}{N_1(t)} - 1 = \frac{N^*-N_1(t)}{N_1(t)} \\
\Rightarrow \quad & e^{-N^*t} = \frac{N^*-N_1(t)}{N_1(t)(N^*-1)} \quad \Rightarrow \quad -N^*t = \log\left[\frac{N^*-N_1(t)}{N_1(t)(N^*-1)}\right] \\
\Rightarrow \quad & t = -\frac{1}{N^*}\log\left[\frac{N^*-N_1(t)}{N_1(t)(N^*-1)}\right] = \frac{1}{N^*}\log\left[\frac{N_1(t)(N^*-1)}{N^*-N_1(t)}\right] \ .
\end{aligned}$$

Si t_1 es el momento en que el 20 % de los individuos conoce la información, se tiene:

$$t_1 = \frac{1}{N^*}\log\left[\frac{0{,}2N^*(N^*-1)}{N^*-0{,}2N^*}\right] = \frac{1}{N^*}\log\left[\frac{0{,}2(N^*-1)}{0{,}8}\right] = \frac{1}{N^*}\log\frac{N^*-1}{4} \ .$$

Si t_2 es el momento en que el 80 % de los individuos conoce la información, se tiene:

$$t_2 = \frac{1}{N^*}\log\left[\frac{0{,}8N^*(N^*-1)}{N^*-0{,}8N^*}\right] = \frac{1}{N^*}\log\left[\frac{0{,}8(N^*-1)}{0{,}2}\right] = \frac{1}{N^*}\log\left[4(N^*-1)\right] \ .$$

La tasa de imitación del modelo logístico será:

$$T_1 = t_2 - t_1 = \frac{1}{N^*}\log\left[4(N^*-1)\right] - \frac{1}{N^*}\log\frac{N^*-1}{4} = \frac{1}{N^*}\log\frac{4(N^*-1)}{(N^*-1)/4} = \frac{\log 16}{N^*} \ .$$

c) Tenemos ahora la ecuación diferencial

$$N_2'(t) = [N_2(t)+1][N^* - N_2(t)]\,,$$

que es separable. Integrándola:

$$\int \frac{\mathrm{d}N_2}{(N_2+1)(N^*-N_2)} = t + k\,.$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(N_2+1)(N^*-N_2)} = \frac{1}{N^*+1}\,\frac{1}{N_2+1} + \frac{1}{N^*+1}\,\frac{1}{N^*-N_2}\,,$$

de donde

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N^*+1}\log(N_2+1) - \frac{1}{N^*+1}\log(N^*-N_2) = t+k \\
\Rightarrow\quad &\log\frac{N_2+1}{N^*-N_2} = (N^*+1)t + k \quad\Rightarrow\quad \frac{N_2+1}{N^*-N_2} = ke^{(N^*+1)t}\,.
\end{aligned}$$

Imponemos la condición inicial:

$$t = 0 \quad\Rightarrow\quad k = \frac{1}{N^*}\,,$$

de donde:

$$\begin{aligned}
&\frac{N_2+1}{N^*-N_2} = \underbrace{\frac{1}{N^*}\,e^{(N^*+1)t}}_{=:\beta} \\
\Rightarrow\quad & N_2+1 = \beta(N^*-N_2) \quad\Rightarrow\quad N_2(1+\beta) = N^*\beta - 1 \\
\Rightarrow\quad & N_2(t) = \frac{N^*\beta-1}{\beta+1} = \frac{e^{(N^*+1)t}-1}{\frac{1}{N^*}\,e^{(N^*+1)t}+1} = \frac{N^*\left[e^{(N^*+1)t}-1\right]}{N^*+e^{(N^*+1)t}} = \frac{N^*\left[1-e^{-(N^*+1)t}\right]}{1+N^*e^{-(N^*+1)t}}\,.
\end{aligned}$$

d) Para despejar t, escribimos:

$$\begin{aligned}
& N_2(t) = \frac{N^*(1-\alpha)}{1+N^*\alpha} \quad \text{con} \quad \alpha = e^{-(N^*+1)t} \\
\Rightarrow\quad & (1+N^*\alpha)N_2(t) = N^*(1-\alpha) \\
\Rightarrow\quad & \alpha\left[N^*N_2(t)+N^*\right] = N^* - N_2(t) \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{N^*-N_2(t)}{N^*(1+N_2(t))} \\
\Rightarrow\quad & e^{-(N^*+1)t} = \frac{N^*-N_2(t)}{N^*(1+N_2(t))} \quad\Rightarrow\quad -(N^*+1)t = \log\frac{N^*-N_2(t)}{N^*(1+N_2(t))} \\
\Rightarrow\quad & \widetilde{t} = \frac{1}{N^*+1}\log\frac{N^*(1+N_2(t))}{N^*-N_2(t)}\,.
\end{aligned}$$

Calculamos el instante $\widetilde{t_1}$ en que el 20 % de los individuos conoce la información:

$$\widetilde{t_1} = \frac{1}{N^*+1}\log\frac{N^*(1+0{,}2N^*)}{N^*-0{,}2N^*} = \frac{1}{N^*+1}\log\frac{1+0{,}2N^*}{0{,}8}\,.$$

Y, si $\widetilde{t_2}$ es el instante en que el 80 % de los individuos conoce la información,

$$\widetilde{t_2} = \frac{1}{N^*+1}\log\frac{N^*(1+0{,}8N^*)}{N^*-0{,}8N^*} = \frac{1}{N^*+1}\log\frac{1+0{,}8N^*}{0{,}2}\,.$$

La tasa de imitación es por tanto:

$$T_2 = \widetilde{t_2} - \widetilde{t_1} = \frac{1}{N^* + 1} \log\left(\frac{1 + 0{,}8N^*}{0{,}2} \frac{0{,}8}{1 + 0{,}2N^*}\right) = \frac{1}{N^* + 1} \log \frac{4(1 + 0{,}8N^*)}{1 + 0{,}2N^*} \,.$$

e) Calculamos la diferencia:

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{1}{N^*} \log 16 - \frac{1}{N^* + 1} \log \frac{4(1 + 0{,}8N^*)}{1 + 0{,}2N^*} > \frac{1}{N^*} \log 16 - \frac{1}{N^*} \log \frac{4(1 + 0{,}8N^*)}{1 + 0{,}2N^*} \\ &= \frac{1}{N^*} \log \frac{16(1 + 0{,}2N^*)}{4(1 + 0{,}8N^*)} = \frac{1}{N^*} \log \frac{4 + 0{,}8N^*}{1 + 0{,}8N^*} > 0 \,, \end{aligned}$$

luego $T_1 > T_2$.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 2
(4 puntos)

- **PRIMERA PARTE**

a) Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(3-y) \\ y'(t) = y(y-3x^2)\,. \end{cases} \tag{36}$$

Se pide rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los puntos de equilibrio del sistema (36). Cada casilla correcta tiene un cierto valor $\alpha > 0$ y cada casilla errónea resta α puntos a la calificación de este apartado. Las casillas en blanco no puntúan. La nota mínima de este apartado es de cero puntos. No se deben incluir las operaciones necesarias, solamente se rellenará el cuadro. La notación AE significa *asintóticamente estable.* **(1 punto)**

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable

b) Se consideran los dos sistemas diferenciales no lineales autónomos en $\mathbb{R}^2$:

$$(\mathrm{S}_1)\quad \begin{cases} x'(t) = v_1(x,y) \\ y'(t) = v_2(x,y) \end{cases} \qquad\qquad (\mathrm{S}_2)\quad \begin{cases} x'(t) = xv_1(x,y) \\ y'(t) = xv_2(x,y)\,. \end{cases}$$

El sistema (S_1) tiene un único punto de equilibrio que es el origen y además admite una integral primera global $f(x,y)$ que posee un mínimo local estricto en el origen.

Se pide elegir la respuesta **V** (verdadera) o **F** (falsa) para cada una de las proposiciones siguientes, referidas a los sistemas diferenciales (S_1) y (S_2). Cada respuesta correcta se puntúa con 0,2 puntos. Cada respuesta incorrecta resta 0,2 puntos. Las respuestas en blanco no puntúan. La nota mínima global del cuadro es de cero puntos. No se deben incluir las operaciones necesarias, solamente se rellenará el cuadro. **(1 punto)**

	V	F
1. Todos los puntos de equilibrio de (S_2) son aislados		
2. El origen es un punto de equilibrio para (S_1) y para (S_2) y en ambos casos es estable pero no es asintóticamente estable		
3. $f(x,y)$ es una integral primera para (S_2) en $\mathbb{R}^2$		
4. (S_1) y (S_2) tienen soluciones periódicas no triviales		
5. Todos los puntos de equilibrio de (S_2) son estables		

- **SEGUNDA PARTE**

Se sabe que

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

es una solución del sistema diferencial lineal con coeficientes constantes

$$X'(t) = AX(t)\,. \tag{37}$$

Se sabe también que la recta $y = -2x$ contiene órbitas de (37).

Para cada uno de los casos (i) y (ii) que se especifican al final, se pide responder a las siguientes cuestiones:

1) Determinar la matriz A.
2) Especificar los puntos de equilibrio del sistema (37) y decidir su estabilidad según Lyapunov.
3) Dibujar las distintas órbitas del sistema (37) en el espacio de fases.
4) Escribir la solución general del sistema (37).

Caso (i): $\det(A) = 3$. **(1 punto)**

Caso (ii): El sistema (37) tiene una infinidad de puntos de equilibrio. **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

- **PRIMERA PARTE**

a) Los puntos de equilibrio del sistema (36) son los que verifican las ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2(3-y) = 0 \\ y(y-3x^2) = 0\,. \end{cases}$$

De la primera ecuación obtenemos $x = 0$ o $y = 3$. De la segunda:

$$\begin{aligned} &x = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 0 \qquad \text{y } (0,0) \text{ es punto de equilibrio} \\ &y = 3 \quad \Rightarrow \quad 3(3-3x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1 \\ &\text{y son puntos de equilibrio } (1,3) \text{ y } (-1,3). \end{aligned}$$

Calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial:

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(3-y) & -x^2 \\ -6xy & 2y-3x^2 \end{pmatrix}.$$

La matriz $D\boldsymbol{v}(0,0)$ es la matriz nula, luego el origen no es punto de equilibrio hiperbólico. En el eje OX ($y=0$), se tiene $y'=0$, luego el eje OX está formado por trayectorias. En un punto arbitrario $(\alpha,0)$ del eje OX se tiene $\boldsymbol{v}(\alpha,0)=(3\alpha^2,0)$, luego ambos semiejes se recorren en el sentido de las x crecientes, y el semieje OX positivo es una trayectoria que se aleja del origen que será, por tanto, punto de equilibrio inestable.

Evaluamos la matriz jacobiana en los otros dos puntos de equilibrio:

$$D\boldsymbol{v}(1,3)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -18 & 3\end{pmatrix}$$

cuyo determinante es negativo, luego el punto $(1,3)$ es un puerto (por tanto, inestable).

$$D\boldsymbol{v}(-1,3)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 18 & 3\end{pmatrix}$$

con determinante positivo y traza positiva, por tanto el punto $(-1,3)$ es un punto de equilibrio hiperbólico, fuente (luego inestable).

Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	Asintóticamente estable (AE)	Estable no AE	Inestable
$(0,0)$	No	No	No	No	No	No	Sí
$(1,3)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$(-1,3)$	Sí	Sí	No	No	No	No	Sí

Aunque el enunciado no lo pide, vamos a dibujar el diagrama de fases del sistema (36). La recta $y=3x$ está formada por trayectorias del sistema. En efecto, dado un punto cualquiera de esa recta $(\alpha,3\alpha)$, con $\alpha\in\mathbb{R}$, se tiene:

$$\boldsymbol{v}(\alpha,3\alpha)=\big(\alpha^2(3-3\alpha),3\alpha(3\alpha-3\alpha^2)\big)=(3\alpha^2-3\alpha^3)(1,3)\,,$$

luego el campo $\boldsymbol{v}$ tiene en todo punto de la recta la dirección del vector $(1,3)$, es decir, la misma dirección de la recta. El diagrama puede verse en la Figura 28.

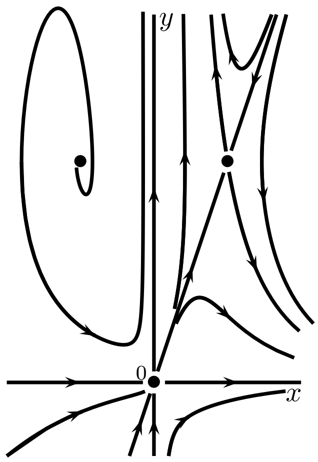


Figura 28: Diagrama de fases del sistema $x'=x^2(3-y)$, $y'=y(y-3x^2)$

b) Todos los puntos del eje OY ($x=0$) son puntos de equilibrio para el sistema (S_2).

El origen es estable para el sistema (S_1) porque $f(x,y)$ es una función de Lyapunov. El origen no es asintóticamente estable porque ninguna trayectoria tiende a $(0,0)$. En efecto si una trayectoria tendiera al origen, el valor de f a lo largo de ella sería igual a $f(0,0)$, por continuidad, contra la hipótesis de que $(0,0)$ es un punto de mínimo local estricto para f. En consecuencia, es claro que el origen admite un entorno en el que todas las trayectorias son cerradas en torno al origen. Esas trayectorias tienen todas un mismo sentido de recorrido (horario o antihorario).

Las trayectorias de (S_1) y las de (S_2) tienen las mismas ecuaciones pues, en ambos casos, son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'(x) = \frac{v_2(x,y)}{v_1(x,y)}\,.$$

La única diferencia entre ambos sistemas es que (S_2) tiene puntos de equilibrio en todos los puntos del eje OY.

El hecho de que todos los puntos del eje OY sean puntos de equilibrio para el sistema (S_2) impide la existencia de trayectorias cerradas para (S_2). Si denotamos por $\boldsymbol{v} := (v_1, v_2)$ el campo vectorial asociado al sistema (S_1), el campo asociado al sistema (S_2) será $x\boldsymbol{v}$, lo cual implica que en el semiplano $x < 0$ las trayectorias de uno y otro sistema tienen sentidos de recorrido opuestos. Por tanto, para el sistema (S_2) los puntos de equilibrio de una de las mitades del eje OY son inestables y los de la otra mitad estables pero no asintóticamente estables. El origen es estable pero no asintóticamente estable por el mismo razonamiento hecho para el origen en el sistema (S_1).

Un ejemplo de pareja de sistemas que cumplen las condiciones del enunciado puede ser el siguiente:

$$(S_1^*)\quad \begin{cases} x' = y(x^2+y^2) \\ y' = -x(x^2+y^2) \end{cases} \qquad\qquad (S_2^*)\quad \begin{cases} x' = xy(x^2+y^2) \\ y' = -x^2(x^2+y^2)\,. \end{cases}$$

La función $f(x,y) := x^2 + y^2$ es una integral primera para ambos con un mínimo relativo estricto en el origen. Las trayectorias de (S_2) son semicircunferencias centradas en el origen situadas en el semiplano $x > 0$ o en el $x < 0$. En los puntos del eje OX el campo vectorial de (S_2) es $(0, -x^4)$. Por tanto, los puntos del semieje OY positivo son puntos de equilibrio inestable ya que cerca de cada uno hay trayectorias que se alejan.

El diagrama de fases de los sistemas (S_1^*) y (S_2^*) puede verse en la Figura 29.

	V	**F**
1. Todos los puntos de equilibrio de (S_2) son aislados		**F**
2. El origen es un punto de equilibrio para (S_1) y para (S_2) y en ambos casos es estable pero no es asintóticamente estable	**V**	
3. $f(x,y)$ es una integral primera para (S_2) en $\mathbb{R}^2$	**V**	
4. (S_1) y (S_2) tienen soluciones periódicas no triviales		**F**
5. Todos los puntos de equilibrio de (S_2) son estables		**F**

- **SEGUNDA PARTE**

La matriz A tiene el autovalor $\lambda = -1$ con autovector asociado $(1,1)^{\mathsf{T}}$. El segundo autovalor λ^* tiene el autovector asociado $(1,-2)^{\mathsf{T}}$.

Caso(i):

Se tiene $\det(A) = \lambda\lambda^* = -\lambda^* = 3$, luego $\lambda^* = -3$.

El origen es, por tanto, un nodo estable. Es el único punto de equilibrio y es asintóticamente estable.

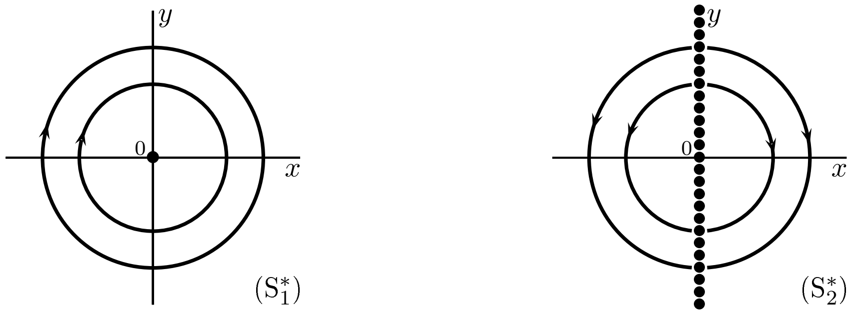


Figura 29: Diagramas de fases de los sistemas (S$_1^*$) y (S$_2^*$)

Sea

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

la matriz cuyas columnas son los autovectores. Esta matriz diagonaliza la matriz A. Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La solución general del sistema es

$$X(t) = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

El diagrama de fases de este sistema puede verse en la Figura 30.

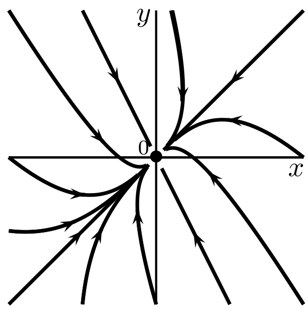


Figura 30: Diagrama de fases del sistema lineal $3x' = -5x + 2y$, $3y' = 4x - 7y$

Caso(ii):

En este caso, $\lambda^* = 0$.

La matriz P es la misma que en el caso (i):

$$\begin{aligned} A = PA^*P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio del sistema (37) son todos los puntos de la recta $y = -2x$. Son todos estables pero no asintóticamente estables.

La solución general del sistema es:

$$X(t) = k_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

El diagrama de fases del sistema puede verse en la Figura 31.

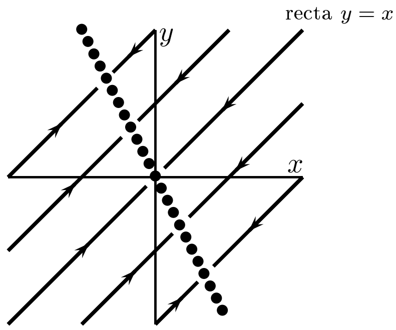


Figura 31: Diagrama de fases del sistema lineal $3x' = -2x - y$, $3y' = -2x - y$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2016-2017 **EXAMEN GLOBAL (10.1.2017)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....
Número de matrícula......................**Grupo**.....................................

EJERCICIO 3
(3 puntos)

Se considera el siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - 4\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 0 \quad , \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\,,\ t > 0 \\ u(0,t) = u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0 \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \operatorname{sen} x \cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x \cos x \quad , \quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\,. \end{cases} \tag{38}$$

a) Plantear el problema de autovalores asociado. Determinar los correspondientes autovalores y autofunciones. **(0,75 puntos)**

b) Para cada $n = 1, 2, \ldots$, hallar la solución general de la E.D.O.:

$$T_n''(t) + 4T_n'(t) + 4n^2 T_n(t) = 0\,. \qquad \textbf{(0,75 puntos)}$$

c) Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución $u(x,t)$ del problema (38). **(1,5 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) Buscamos soluciones de la E.D.P. y las condiciones de frontera en la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sustituyendo en la E.D.P.:

$$X''(x)T(t) - X(x)T''(t) - 4X(x)T'(t) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t) + 4T'(t)}{T(t)} = \lambda\,.$$

El problema de autovalores asociado es:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) = X\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0\,. \end{cases}$$

Sabemos que solamente tiene soluciones para $\lambda < 0$. Entonces $\lambda = -|\lambda|$. La solución general de la E.D.O. es:

$$X(x) = c_1 \cos\sqrt{|\lambda|}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}x\,.$$

Imponemos las condiciones de frontera:

$$0 = X(0) = c_1$$
$$0 = X\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|\lambda|}\,\frac{\pi}{2} = \pi n \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|\lambda|} = 2n\,,$$

luego los autovalores son $\lambda_n = -4n^2$ y las autofunciones $X_n(x) = \operatorname{sen} 2nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

b) La ecuación característica asociada a la E.D.O. en $T(t)$ es

$$r^2 + 4r + 4n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = -2 \pm \sqrt{4 - 4n^2} = -2 \pm 2\sqrt{1 - n^2}\,.$$

Para $n = 1$, $r = -2$ es una raíz doble de la ecuación característica, y la solución general de la E.D.O. es

$$T_1(t) = e^{-2t}(A_1 + B_1 t)\,.$$

Para $n \geq 2$, las raíces de la ecuación característica son

$$r = -2 \pm 2i\sqrt{n^2 - 1}\,,$$

y la solución general de la E.D.O.:

$$T_n(t) = e^{-2t}\left(A_n \cos\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right)\right)\,.$$

c) Ensayamos como solución del problema:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{-2t}(A_1 + B_1 t)\operatorname{sen} 2x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} e^{-2t}\left(A_n \cos\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right) + B_n \operatorname{sen}\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right)\right)\operatorname{sen} 2nx\,. \end{aligned}$$

Imponemos la condición inicial:

$$0 = u(x,0) = A_1 \operatorname{sen} 2x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \operatorname{sen} 2nx \quad \Rightarrow \quad A_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Resulta por tanto:

$$u(x,t) = B_1 t e^{-2t}\operatorname{sen} 2x + \sum_{n=2}^{\infty} B_n e^{-2t}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right)\operatorname{sen} 2nx\,.$$

Derivando respecto de t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= B_1(e^{-2t} - 2te^{-2t})\operatorname{sen} 2x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} B_n\left(-2e^{-2t}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right) + 2e^{-2t}\sqrt{n^2-1}\cos\left(2\sqrt{n^2-1}\,t\right)\right)\operatorname{sen} 2nx\,. \end{aligned}$$

Imponemos la condición inicial a la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= B_1 \operatorname{sen} 2x + \sum_{n=2}^{\infty} 2B_n\sqrt{n^2-1}\operatorname{sen} 2nx \\ &= \operatorname{sen} x \cos^3 - \operatorname{sen}^3 x \cos x = \operatorname{sen} x \cos x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \cos 2x = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\,, \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} &B_n = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 2 \\ &2B_2\sqrt{3} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{24}\,. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema es:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{3}}{24}\,e^{-2t}\operatorname{sen}\left(2\sqrt{3}\,t\right)\operatorname{sen} 4x\,.$$

Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2016-2017	**EXAMEN JULIO (23.6.2017)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 1
(4 puntos)

a) Hallar la solución general de la E.D.O.:

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \operatorname{sen} t \cos^5 t - \operatorname{sen}^5 t \cos t \,. \qquad \textbf{(1 punto)}$$

b) Hallar la solución general de la E.D.O.:

$$x'''(t) - 2x''(t) + x'(t) = \operatorname{sen} t \cos^5 t - \operatorname{sen}^5 t \cos t \,. \qquad \textbf{(1 punto)}$$

c) Se considera la E.D.O.:

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 \,.$$

Escribir su sistema diferencial equivalente utilizando las nuevas variables

$$u_1(t) = x(t) \quad ; \qquad u_2(t) = x'(t) \,.$$

Hallar la solución de dicho sistema diferencial equivalente que satisface la condición inicial:

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad \textbf{(0,5 puntos)}$$

d) Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad ; \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad \textbf{(0,5 puntos)}$$

e) Se considera el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \quad ; \quad x'(0) = a \,. \end{cases} \tag{39}$$

Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la solución $x(t)$ de (39) satisface que $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Para dichos valores, representar gráficamente la correspondiente solución de (39). **(1 punto)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otras dos hojas más)

a) El polinomio característico asociado es $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Por tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_H(t) = k_1 e^t + k_2 t e^t \,.$$

Para hallar una solución particular de la ecuación completa, observamos previamente:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t \cos^5 t - \operatorname{sen}^5 t \cos t &= \operatorname{sen} t \cos t (\cos^4 t - \operatorname{sen}^4 t) \\ &= \operatorname{sen} t \cos t (\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \cos 2t = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 4t \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ensayamos como solución particular:

$$\begin{aligned} & x_P(t) = A\operatorname{sen} 4t + B\cos 4t \\ \Rightarrow\quad & x_P'(t) = 4A\cos 4t - 4B\operatorname{sen} 4t \\ \Rightarrow\quad & x_P''(t) = -16A\operatorname{sen} 4t - 16B\cos 4t\,. \end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$-16A\operatorname{sen} 4t - 16B\cos 4t + 8B\operatorname{sen} 4t - 8A\cos 4t + A\operatorname{sen} 4t + B\cos 4t = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4t$$

de donde

$$\begin{cases} -15A + 8B = \dfrac{1}{4} \\ -8A - 15B = 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A = -\dfrac{15}{8}\,B \\ \dfrac{225}{8}\,B + 8B = \dfrac{1}{4} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad B = \frac{2}{289} \quad \text{y} \quad A = -\frac{15}{1156}\,.$$

Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$x(t) = (k_1 + k_2 t)e^t - \frac{15}{1156}\operatorname{sen} 4t + \frac{2}{289}\cos 4t\,.$$

b) Haciendo $w(t) := x'(t)$ se obtiene la EDO

$$w''(t) - 2w'(t) + w(t) = \operatorname{sen} t\cos^5 t - \operatorname{sen}^5 t\cos t$$

cuya solución general hemos obtenido en **a)**:

$$w(t) = (k_1 + k_2 t)e^t - \frac{15}{1156}\operatorname{sen} 4t + \frac{2}{289}\cos 4t\,.$$

Tendremos $x(t) = \int w(t)\,\mathrm{d}t$. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} & \int te^t\,\mathrm{d}t \qquad \begin{pmatrix} u = t & \Rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^t\,\mathrm{d}t & \Rightarrow & v = e^t \end{pmatrix} \\ & = te^t - \int e^t\,\mathrm{d}t = te^t - e^t + c_3 = (t-1)e^t + c_3\,. \end{aligned}$$

La solución general de la ecuación **b)** es:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 + \frac{15}{4624}\cos 4t + \frac{1}{578}\operatorname{sen} 4t\,.$$

c) Introducimos las variables indicadas:

$$\begin{cases} u_1 := x \\ u_2 := x' \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} u_1' = x' = u_2 \\ u_2' = x'' = 2x' - x = 2u_2 - u_1\,. \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}\,.$$

La solución general de este sistema diferencial puede obtenerse directamente de la solución homogénea del apartado **a)**:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= x_H(t) = (k_1 + k_2 t)e^t \\ u_2(t) &= x'_H(t) = (k_1 + k_2 t)e^t + k_2 e^t \,. \end{aligned}$$

Las constantes k_1 y k_2 se obtienen aplicando la condición inicial:

$$\begin{aligned} 1 &= u_1(0) = k_1 \\ 0 &= u_2(0) = k_1 + k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = -1 \,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 - t \\ -t \end{pmatrix} .$$

d) El sistema diferencial propuesto es el sistema diferencial equivalente a la EDO homogénea del apartado **b)**. Por lo tanto, su solución general es:

$$\begin{cases} x_1(t) = (k_1 + k_2 t)e^t + k_3 \\ x_2(t) = (k_1 + k_2 t)e^t + k_2 e^t \\ x_3(t) = (k_1 + k_2 t)e^t + 2k_2 e^t \,. \end{cases}$$

Obtenemos las constantes imponiendo la condición inicial:

$$\begin{cases} 2 = x_1(0) = k_1 + k_3 \\ 1 = x_2(0) = k_1 + k_2 \\ 0 = x_3(0) = k_1 + 2k_2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = -1 \\ k_3 = 0 \,. \end{cases}$$

Resulta por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 2 - t \\ 1 - t \\ -t \end{pmatrix} .$$

MÉTODO ALTERNATIVO:

El sistema diferencial propuesto está desacoplado, en el sentido de que podemos separar las ecuaciones segunda y tercera que constituyen un sistema diferencial en el que solo intervienen las funciones incógnita $x_2(t)$ y $x_3(t)$:

$$\begin{pmatrix} x'_2(t) \\ x'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Este problema de valor inicial coincide con el resuelto en **c)**. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1 - t \\ -t \end{pmatrix} .$$

Puesto que

$$x'_1(t) = x_2(t) = (1 - t)e^t \,, \quad x_1(0) = 2 \,,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \int (1 - t)e^t \, \mathrm{d}t \qquad \begin{pmatrix} u = 1 - t & \Rightarrow & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^t \, \mathrm{d}t & \Rightarrow & v = e^t \end{pmatrix} \\ &= (1 - t)e^t + \int e^t \, \mathrm{d}t = (1 - t)e^t + e^t + k = (2 - t)e^t + k \,. \end{aligned}$$

Imponiendo la condición inicial:

$$2 = x_1(0) = 2 + k \quad \Rightarrow \quad k = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = (2-t)e^t\,.$$

e) La solución general es $x(t) = (k_1 + k_2 t)e^t$. Imponemos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = k_1 \\ x'(t) &= (k_1 + k_2 t)e^t + k_2 e^t \\ a &= x'(0) = k_1 + k_2 = 1 + k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = a - 1\,. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de (39) es:

$$x(t) = (1 + (a-1)t)\, e^t\,.$$

Es claro que, si $a - 1 \geq 0$, la función $x(t)$ es creciente para $t \geq 0$ y $x(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. En cambio, si $a - 1 < 0$, existe un valor $t > 0$ a partir del cual $x(t) < 0$. Para los valores $a \geq 1$, se tiene:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty\,, \qquad \lim_{t \to -\infty} x(t) = 0\,.$$

Calculamos los extremos relativos. Si $a = 1$, la función es $x(t) = e^t$ que carece de extremos locales. Si $a > 1$, se tiene:

$$x'(t) = (a + (a-1)t)\, e^t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{a}{1-a} < 0\,,$$

y en ese valor de t se alcanza un mínimo (absoluto). En la Figura 32 se representa la función $x(t)$ para $a > 1$.

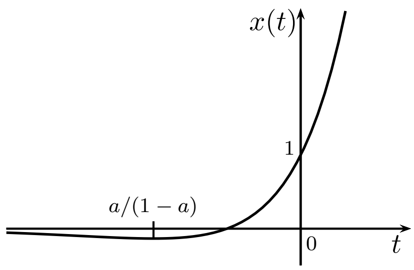


Figura 32: Función $x(t) = (1 + (a-1)t)\, e^t$ para $a > 1$

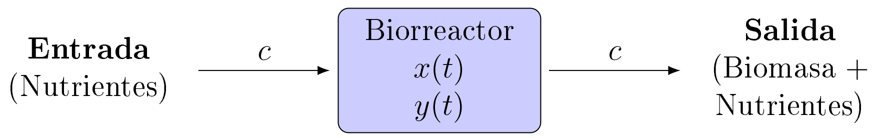
Ec. Diferenciales (G.I.T.I. y G.I.Q.). Curso 2016-2017 **EXAMEN JULIO (23.6.2017)**

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula........................**Grupo**......................................

EJERCICIO 2
(3 puntos)

Un biorreactor es un aparato de laboratorio que se emplea para el cultivo de microorganismos (biomasa). Una versión sencilla consiste en una *cámara de cultivo,* que es un recipiente de volumen V (litros) fijo en el que crecen los microorganismos en un medio acuoso. El recipiente dispone de una entrada para los nutrientes, que se proporcionan desde el exterior por medio de una disolución acuosa de concentración fija $y^* > 0$ (gramos por litro), y de una salida para recolectar el flujo resultante del proceso (mezcla de microorganismos y nutrientes). Se supone que el caudal de entrada y el caudal de salida son ambos constantes e iguales a $c > 0$ (litros por segundo).



Se consideran las variables de estado:

- $x(t)$ = concentración de microorganismos (biomasa) en el biorreactor en el instante t (gr/l).
- $y(t)$ = concentración de nutrientes en el biorreactor en el instante t (gr/l).

La masa de microorganismos (biomasa) crece en el biorreactor con una tasa de crecimiento $k(y) > 0$, que depende de la densidad de nutrientes consumida.

Bajo las hipótesis anteriores, un sencillo razonamiento de balance de masas proporciona el siguiente modelo para la dinámica del proceso:

$$\begin{cases} x'(t) = k(y(t))x(t) - \dfrac{c}{V}\,x(t) \\ y'(t) = -k(y(t))x(t) - \dfrac{c}{V}\,y(t) + \dfrac{c}{V}\,y^*\,. \end{cases} \tag{40}$$

En este ejercicio fijaremos los siguientes valores:

$$c = 5 \text{ l/seg} \quad ; \qquad V = 100 \text{ l} \quad ; \qquad k(y) = \frac{2y}{y+39}\,\text{seg}^{-1}\,. \tag{41}$$

Se pide:

a) Determinar el subconjunto del plano que es el espacio de fases del modelo. **(0,25 puntos)**

b) Determinar, según los valores de $y^* > 0$, los puntos de equilibrio de (40) que están incluidos en el espacio de fases. **(0,5 puntos)**

c) Rellenar el siguiente cuadro, escribiendo en cada casilla SÍ o NO. La primera columna se rellenará con los valores de $y^* > 0$ y la segunda con los correspondientes puntos de equilibrio de (40), que están incluidos en el espacio de fases. Para aquellos puntos de equilibrio **que NO sean hiperbólicos,** NO se pide su estabilidad, por lo que las correspondientes casillas se marcarán con un aspa ($\times$).

Cada casilla correcta tiene un cierto valor $\alpha > 0$ y cada casilla errónea resta α puntos a la calificación de este apartado. Las casillas en blanco no puntúan. La nota mínima de este apartado es de cero puntos. No se deben incluir las operaciones necesarias, únicamente se rellenará el cuadro.

La notación AE significa *asintóticamente estable.* **(1,5 puntos)**

Valores de $y^* > 0$	Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	AE	Estable no AE	Inestable

Se supone que el proceso ha alcanzado un estado de equilibrio estable o asintóticamente estable (si existe).

d) Determinar los valores de $y^* > 0$ para los cuales el flujo saliente del biorreactor permite recolectar biomasa y especificar el volumen de solución acuosa saliente que se necesita para recolectar 100 gr de biomasa. **(0,5 puntos)**

e) Determinar los valores de $y^* > 0$ para los cuales se extingue la biomasa en el biorreactor. **(0,25 puntos)**

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otra hoja más)

a) El espacio de fases es el primer cuadrante del plano XY:

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \, y \geq 0\right\}.$$

b) Los puntos de equilibrio son los que verifican:

$$\begin{cases} k(y)x - \dfrac{c}{V}\, x = 0 \\ -k(y)x - \dfrac{c}{V}\, y + \dfrac{c}{V}\, y^* = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ \text{o} \\ k(y) = \dfrac{c}{V} \,. \end{cases}$$

Si $x = 0$, la segunda ecuación implica $y = y^*$, y un punto de equilibrio es $(0, y^*)$. Si $k(y) = c/V$, utilizando los datos del enunciado:

$$\frac{2y}{y + 39} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad 40y = y + 39 \quad \Rightarrow \quad y = 1\,.$$

Puesto que $k(y) = c/V$, la segunda ecuación proporciona:

$$x = y^* - y \quad \Rightarrow \quad x = y^* - 1\,,$$

luego un punto de equilibrio es $(y^* - 1, 1)$, válido únicamente si $y^* \geq 1$. En resumen, los puntos de equilibrio son:

$$\begin{cases} (0, y^*)\,, & \text{si } 0 < y^* < 1 \\ (0, 1)\,, & \text{si } y^* = 1 \\ (0, y^*),\; (y^* - 1, 1)\,, & \text{si } y^* > 1\,. \end{cases}$$

c) Estabilidad de los puntos de equilibrio hiperbólicos:
La matriz jacobiana el campo vectorial es

$$D\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} k(y) - \dfrac{c}{V} & xk'(y) \\ -k(y) & -xk'(y) - \dfrac{c}{V} \end{pmatrix}.$$

Particularizando en $(0, y^*)$:

$$D\boldsymbol{v}(0,y^*) = \begin{pmatrix} k(y^*) - \dfrac{c}{V} & 0 \\ -k(y^*) & -\dfrac{c}{V} \end{pmatrix}$$

con autovalores

$$k(y^*) - \frac{c}{V}\,, \qquad -\frac{c}{V}\,.$$

Recordando los valores fijados en (41),

$$0 < y^* < 1 \quad \Rightarrow \quad k(y^*) < \frac{c}{V} \text{ ya que } \frac{2y^*}{y^*+39} < \frac{1}{20}$$

y el punto $(0, y^*)$ es asintóticamente estable (sumidero)

$$y^* = 1 \quad \Rightarrow \quad k(1) = \frac{c}{V} \quad \text{y el punto } (0,1) \text{ no es hiperbólico}$$

$$y^* > 1 \quad \Rightarrow \quad k(y^*) > \frac{c}{V} \quad \text{y el punto } (0,y^*) \text{ es inestable (un puerto).}$$

Calculamos la matriz jacobiana en el otro punto:

$$D\boldsymbol{v}(y^*-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & k'(1)(y^*-1) \\ -k(1) & -k'(1)(y^*-1) - \dfrac{c}{V} \end{pmatrix}.$$

Como $y^* - 1 > 0$, esta matriz tiene determinante positivo y traza negativa, ya que

$$k'(y) = \frac{2 \cdot 39}{(y+39)^2} > 0\,,$$

luego el punto $(y^* - 1, 1)$ es asintóticamente estable (sumidero). Por tanto, el cuadro que se pide rellenar es:

Valores de $y^* > 0$	Puntos de equilibrio	Hiperbólico	Fuente	Puerto	Sumidero	AE	Estable no AE	Inestable
$0 < y^* < 1$	$(0, y^*)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No
$y^* = 1$	$(0, 1)$	No	×	×	×	×	×	×
$y^* > 1$	$(0, y^*)$	Sí	No	Sí	No	No	No	Sí
$y^* > 1$	$(y^* - 1, 1)$	Sí	No	No	Sí	Sí	No	No

d) Suponemos que estamos en un punto de equilibrio estable o asintóticamente estable. Se recolecta biomasa solamente si la coordenada x de ese punto es positiva. Es decir, estamos en el punto de equilibrio $(y^* - 1, 1)$ y suponemos $y^* > 1$. La concentración de biomasa saliente es $y^* - 1$, que debe ser igual al cociente de los 100 gramos que deseamos recolectar por el volumen $\widetilde{V}$ de solución acuosa que se necesita:

$$y^* - 1 = \frac{100}{\widetilde{V}} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{V} = \frac{100}{y^* - 1} \text{ litros.}$$

e) No se recolecta biomasa si el punto de equilibrio en que estamos es $(0, y^*)$. Para que el punto sea estable o asintóticamente estable, necesitamos que sea $0 < y^* \leq 1$.

NOMBRE .... **APELLIDOS** ....

Número de matrícula .... **Grupo** ....

EJERCICIO 3
(3 puntos)

a) Cada uno de los tres vectores:

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{2t} \\ e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \quad ; \quad X_3(t) = \begin{pmatrix} e^t - e^{3t} \\ -e^{3t} \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$$

es una solución particular del sistema diferencial lineal con coeficientes constantes $X'(t) = AX(t)$.
Determinar la matriz A. Determinar la matriz e^{tA}. **(1 punto)**

---

b) Se trata de estudiar la existencia de autovalores para el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) \\ X(0) + X'(0) = 0 \quad ; \quad X(1) = 0\,. \end{cases} \tag{42}$$

b.1) ¿Es $\lambda = 0$ un autovalor de (42)? Razónese. En caso afirmativo, determinar las correspondientes autofunciones. **(1 punto)**

b.2) ¿Existe algún $\lambda > 0$ que sea autovalor de (42)? Razónese. En caso afirmativo, determinar las correspondientes autofunciones. **(1 punto)**

Indicación.– Puede ser de utilidad la representación gráfica de la función real de variable real:

$$f(u) = u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u \quad , \qquad u \geq 0\,.$$

CUESTIÓN COMPLEMENTARIA.– El alumno puede optar a responder a la cuestión siguiente. La respuesta correcta, bien redactada, razonada y ordenada, se calificará con una puntuación máxima de hasta 1 punto, con el fin de mejorar la calificación global del examen.

¿Existe algún $\lambda < 0$ que sea autovalor de (42)? Razónese. En caso afirmativo, especificar cuántos autovalores existen. En caso afirmativo, localizar cada autovalor λ^* en un intervalo real acotado ($a \leq \lambda^* \leq b$) que contenga en su interior únicamente a dicho autovalor, y de amplitud la menor posible.

Respuesta: (responder exclusivamente en esta hoja y otras dos hojas más)

a) Las soluciones dadas se pueden escribir en la forma:

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_3(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Por lo tanto, los autovalores de A y sus respectivos autovectores asociados son:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \qquad \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

resulta de aquí que la matriz A es diagonalizable y además:

$$A = PA^*P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} ,$$

donde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Resulta

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

Además,

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & -e^t + e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} .$$

b.1) Si $\lambda = 0$, la ecuación diferencial se reduce a $X''(x) = 0$, con solución general $X(x) = c_1 x + c_2$. Imponiendo las condiciones de contorno:

$$\begin{cases} X(0) + X'(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ X(1) = c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2 .$$

En consecuencia, $\lambda = 0$ es un autovalor de (42) y las correspondientes autofunciones son

$$X_0(x) = c_1(x-1) .$$

b.2) Si $\lambda > 0$, la ecuación característica es

$$\begin{aligned} r^2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad r = \pm\sqrt{\lambda} \quad &\Rightarrow \quad X(x) = c_1 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \\ &\Rightarrow \quad X'(x) = c_1\sqrt{\lambda}\operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}x\right) . \end{aligned}$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
X(0)+X'(0) &= c_1 + c_2\sqrt{\lambda} = 0\\
X(1) &= c_1 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda} + c_2 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda} = 0\\
&\Rightarrow \quad c_1 = -c_2\sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad -c_2\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} + c_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda} = 0\\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) \equiv 0 \quad \text{(que no es autofunción)}\\ \text{o}\\ \sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}\sqrt{\lambda} = 0\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Un número $\lambda > 0$ es un autovalor si y solo si es solución de la ecuación

$$\sqrt{\lambda}\operatorname{ch}\sqrt{\lambda} - \operatorname{sh}\sqrt{\lambda} = 0\,. \tag{43}$$

Observamos que la función continua

$$f(u) := u \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u$$

es nula en $u = 0$, y su derivada es

$$f'(u) = \operatorname{ch} u + u \operatorname{sh} u - \operatorname{ch} u = u \operatorname{sh} u > 0$$

para todo $u > 0$. Por lo tanto, no existe ninguna solución $\lambda > 0$ de (43). En conclusión, (42) no tiene autovalores positivos.

Cuestión complementaria.

Si $\lambda < 0$, se tiene $\lambda = -|\lambda|$. La ecuación característica de la EDO es $r^2 = -|\lambda|$, con raíces $r = \pm i\sqrt{|\lambda|}$. La solución general de la EDO será

$$\begin{aligned}
X(x) &= c_1 \cos\sqrt{|\lambda|}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}\,x\\
\Rightarrow \quad X'(x) &= -c_1\sqrt{|\lambda|}\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|}\,x + c_2\sqrt{|\lambda|}\cos\sqrt{|\lambda|}\,x\,.
\end{aligned}$$

Imponemos las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned}
X(0)+X'(0) &= c_1 + c_2\sqrt{|\lambda|} = 0\\
X(1) &= c_1 \cos\sqrt{|\lambda|} + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|} = 0\,.
\end{aligned}$$

Existe un autovalor $\lambda < 0$ si y solo si es solución de la ecuación:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{|\lambda|}\\ \cos\sqrt{|\lambda|} & \operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|} \end{vmatrix} = 0\\
\Rightarrow \quad &\operatorname{sen}\sqrt{|\lambda|} - \sqrt{|\lambda|}\cos\sqrt{|\lambda|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\sqrt{|\lambda|} = \sqrt{|\lambda|}\,.
\end{aligned}$$

Representamos gráficamente en un mismo diagrama las funciones $f(u) := \operatorname{tg} u$, $g(u) := u$, para $u \geq 0$ (Figura 33).

Se observa que la ecuación $u = \operatorname{tg} u$ $(u > 0)$ tiene un conjunto infinito numerable de soluciones:

$$\begin{aligned}
&0 < u_1 < \frac{\pi}{2}\\
&\pi < u_2 < \frac{3\pi}{2}\\
&2\pi < u_3 < \frac{5\pi}{2}\\
&\qquad \cdots\\
&n\pi < u_{n+1} < \frac{(2n+1)\pi}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,
\end{aligned}$$

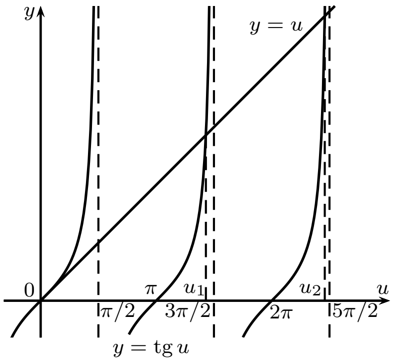


Figura 33: Raíces positivas de $\operatorname{tg} u = u$

de donde:

$$\sqrt{|\lambda|} = u_n \quad \Rightarrow \quad |\lambda| = u_n^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = -u_n^2 \,.$$

Existe por tanto un conjunto infinito numerable de autovalores negativos:

$$n^2\pi^2 < u_{n+1}^2 < \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4}$$

localizados en los intervalos:

$$-\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} < \lambda_n < -n^2\pi^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \,.$$