ENUNCIADOS DE PROBLEMAS DE LA ASIGNATURA:

ECUACIONES DIFERENCIALES.

Grado en Ingeniería Química.

Curso 2016-17.

Tema 1.– MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE E.D.O.

1.1.– Calcular el valor de las constantes a y b para que $y(x)$ sea solución de la E.D.O. propuesta, en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll}
1)\ y(x) = \left(\dfrac{x}{x+a}\right)^{ax} & y' - \dfrac{y}{x+1} = y \log \dfrac{x}{x+1} \\
2)\ y(x) = (a + e^{bx})^2 & 2y'' + 2y' = y^{-1/2} y' \\
3)\ y(x) = x\left(a + \dfrac{b}{\log x}\right) & 4x^2 y' + x^2 + 4y^2 = 0 \\
4)\ y(x) = ax + b & y' = \dfrac{y^2}{x} - \left(2 + \dfrac{1}{x}\right) y + x + 2
\end{array}$$

1.2.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O. exactas.

$$\begin{array}{llcll}
1) & 3x^2 + 6xy^2 + (6x^2 y + 4y^3) y' = 0 & ; & 2) & (x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0 \\
3) & (x + y \cos x)dx + \operatorname{sen} x dy = 0 & ; & 4) & x^2 + y^2 + 2xyy' = 0 \\
5) & \dfrac{1}{x^2 y} + \dfrac{1}{x} + \left(\dfrac{1}{xy^2} - \dfrac{1}{y}\right) y' = 0 & ; & 6) & 3x^2 y^5 - \dfrac{1}{x^3} + \left(5x^3 y^4 + \dfrac{1}{y^3}\right) y' = 0
\end{array}$$

1.3.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O. de variables separables.

$$\begin{array}{llcll}
1) & (1 + y) y' = x^2 (1 - y) & ; & 2) & y' + y \operatorname{tg} x = 0 \\
3) & y' \operatorname{sen} x + y = 0 & ; & 4) & y' - y \operatorname{sen} x = 0 \\
5) & \sqrt{1 + x^2}\, y' - y = 0 & ; & 6) & y' = e^{x-y}
\end{array}$$

1.4.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O.

$$\begin{array}{llcll}
1) & (2ye^{y/x} - x) y' + 2x + y = 0 & ; & 2) & xy^2 y' = x^3 + y^3 \\
3) & xy' - y = x(1 - e^{-y/x}) & ; & 4) & 3y + x = (3x + y) y'
\end{array}$$

1.5.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O. lineales de primer orden.

$$\begin{array}{llcll}
1) & y' + y \dfrac{2x - 1}{(x + 1)(x - 2)} = \dfrac{3}{(x + 1)(x - 2)} & ; & 2) & xy' + y - e^x = 0 \\
3) & y' - y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x} & ; & 4) & xy' + 3y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2} \\
5) & y' = y + x^2 + x + 1 & ; & 6) & y' + 2xy = 2xe^{-x^2}
\end{array}$$

1.6.– Hallar la solución general de las siguientes E.D.O. de Bernoulli.

$$\begin{array}{llcll} 1) & xy' + y = y^2 \log x & ; & 2) & y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5 \\ 3) & y' + \dfrac{y}{x} + \dfrac{\sqrt{y}}{x^2} = 0 & ; & 4) & y' + y = y^2 e^x \\ 5) & 2xy' - y = \dfrac{2x^3 - 1}{y} & ; & 6) & xy' = y + 2xy^2 \end{array}$$

1.7.– Haciendo el cambio de función incógnita $y(x) = y_P(x) + \frac{1}{u(x)}$, hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O.

$$\begin{array}{llcl} 1) & y' + y^2 - 3y \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0 & ; & y_P = \operatorname{tg} x \\ 2) & y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2} & ; & y_P = \dfrac{1}{x} \\ 3) & 2x^2 y' = (x-1)(y^2 - x^2) + 2xy & ; & y_P = -x \\ 4) & y' = (y-1)(xy - y - x) & ; & y_P = 1 \\ 5) & y' + y^2 = x^{-4} & ; & y_P = \dfrac{x+1}{x^2} \end{array}$$

1.8.– Resolver el siguiente problema con condición inicial:

$$x'' + x' = x'^2 \quad ; \quad x(0) = 0 \ , \ x'(0) = 1/2$$

1.9.– El modelo matemático de Von Bertalanffy del crecimiento en peso de un pez es:

$$\frac{dw}{dt} = aw^{2/3} - bw$$

donde w representa el peso variable del pez y a, b son constantes positivas. El término $aw^{2/3}$ representa el aporte debido a los nutrientes, en la hipótesis de que este aporte es proporcional a la superficie del pez y bw representa la disminución debida a la respiración, en la hipótesis de suponerla proporcional al peso del pez.

Se pide:

1) Expresar w en función de t. Se supone que en el instante inicial el peso del pez es $w_0 > 0$, suficientemente pequeño.

2) Dibujar en el plano cartesiano (t, w) la evolución del peso del pez. Hallar el peso máximo que puede alcanzar un pez. Determinar el tiempo necesario para que un pez alcance la mitad de su peso máximo.

1.10.– En una reacción química, dos sustancias A y B reaccionan para producir un compuesto C. Si $x(t)$ es la concentración de C en el instante t, su variación es

$$x'(t) = k(a - x)(b - x)$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad, y a, b son las concentraciones iniciales (en $t = 0$) de las sustancias A y B. Se supone $0 < a < b$.

Se pide:

1) Determinar la concentración de C en función del tiempo t, para $t > 0$, suponiendo que $x(0) = x_0 > 0$.

2) Estudiar el comportamiento de la concentración de C cuando el tiempo aumenta, según los valores de la concentración inicial x_0.

1.11.– Un cierto cultivo está formado por bacterias de dos tipos A y B. La dinámica de sus poblaciones está regida por el sistema diferencial

$$x' = (2-a)x \ , \quad y' = ax + y \ , \quad 0 < a < 1$$

donde $x = x(t)$, $y = y(t)$ son las poblaciones de bacterias de los tipos A y B respectivamente, y a es una constante.

1) Determinar explícitamente las funciones $x(t)$, $y(t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Describir el comportamiento de ambas poblaciones cuando el tiempo tiende a infinito.

2) Determinar en cada instante t la proporción de bacterias del tipo A presentes en la población total. Determinar el *nivel de saturación* S de las bacterias de tipo A, es decir, el valor de la proporción anterior cuando el tiempo tiende a infinito. Estudiar la dependencia de S respecto de las poblaciones iniciales.

1.12.– Se considera la E.D.O.:

$$y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0 \qquad (*)$$

a) Hallar una solución particular $y_P(x)$ que sea un polinomio de primer grado en x.

b) Con ayuda del cambio de función incógnita $y(x) = y_P(x) + \frac{1}{u(x)}$, hallar la solución de (*), $y(x)$, que satisface la condición inicial $y(0) = -1$.

1.13.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$y''(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2} \qquad ; \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

1.14.– Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$$

sabiendo que admite una solución particular $y_P(x) = x^n$.

Indicación: Hacer el cambio de función incógnita $y(x) = y_P(x) + \frac{1}{u(x)}$.

1.15.– Calcular la solución del problema de valor inicial

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{x^2 - 6x + 10} \quad ; \quad y(3) = 9$$

Indicación.– Efectuar el cambio de función incógnita $y = xu$.

1.16.– Calcular todas las soluciones de la E.D.O.:

$$xy'(x) + 4y(x) = x^2\sqrt{y(x)}$$

que sean acotadas en $x = 0$.

1.17.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$(1 + x^3)y' + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0 \quad ; \quad y(0) = \frac{1}{4}$$

sabiendo que la ecuación diferencial admite una solución particular $y_P(x)$ que es un polinomio de primer grado.

Indicación: Hacer el cambio de función incógnita $y(x) = y_P(x) + \frac{1}{u(x)}$.

Tema 2.– SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN Y COEFICIENTES CONSTANTES.

2.1.– Expresar la solución general del sistema diferencial $X' = AX$ en términos de los autovalores y autovectores de la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.2.– Hallar la solución del problema de valor inicial $X' = AX$, $X(0) = X_0$, calculando la exponencial de la matriz A.

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 5 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.3.– Hallar la solución general del sistema diferencial $X' = AX$, siendo A cada una de las siguientes matrices.

$$1) \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad 2) \begin{bmatrix} -1 & 16 & -26 \\ 0 & 23 & -42 \\ 0 & 14 & -26 \end{bmatrix} \quad ; \quad 3) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.4.– Hallar la solución general del sistema diferencial $X' = AX + B(t)$:

$$1) \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ B(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

$$2) \qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 5 \end{bmatrix} \ , \ B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} t \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.5.– Encontrar la solución general de cada uno de los siguientes sistemas diferenciales.

$$1) \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 4x - 2y + e^t \\ y' & = & 6x - 3y + e^{-t} \end{array} \right. \quad ; \quad 2) \left\{ \begin{array}{rcl} 7x' + y' + 2x & = & 30 \\ x' + 3y' + y & = & 0 \end{array} \right.$$

2.6.– Encontrar la solución de cada uno de los siguientes problemas de Cauchy.

$$1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' + x_1 - 9x_2 - t & = & 0 \\ x_1' + 2x_2' + 3x_1 - 19x_2 - t - 2 & = & 0 \end{array} \right. \quad ; \quad x_1(0) = 1 \ , \ x_2(0) = -1$$

$$2) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x'' & = & x - y \\ y'' & = & x - y \end{array} \right. \quad ; \quad x(0) = y(0) = y'(0) = 0 \ , \ x'(0) = 1$$

2.7.– Resolver el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2x + yz \\ y' & = & y - z \\ z' & = & y + z \end{array} \right. \quad ; \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1$$

2.8.– Hallar la solución general del sistema diferencial $X' = AX$, según los diferentes valores de los parámetros reales a, b, c.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & c \\ 0 & -c & a \end{bmatrix}$$

2.9.– Determinar una matriz A real cuadrada de orden 2×2 tal que la exponencial e^{tA} sea la matriz

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} 2^t & t2^t \\ 0 & 2^t \end{bmatrix} .$$

Resolver el problema diferencial

$$X' = AX + B(t) \quad \text{con} \quad B(t) = [t^2, t]^T.$$

2.10.– Determinar, si existen, todas las soluciones periódicas (reales) del sistema diferencial $X' = AX$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

2.11.– Se considera el sistema diferencial $X'(t) = AX(t)$, en el que A es una matriz real cuadrada constante 2×2. Enunciar las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer el determinante y la traza de A para que todas las soluciones del sistema diferencial tiendan hacia cero cuando t tiende hacia $+\infty$.

2.12.– Sea A una matriz real cuadrada 2×2, con autovalores reales y distintos λ y μ. Se supone que un autovector asociado a λ es $\mathbf{u} = (1, 0)$ y un autovector asociado a μ es $\mathbf{v} = (1, 1)$.

Dibujar el espacio de fases del sistema diferencial $X' = AX$ en cada uno de los siguientes casos:

a)	$0 < \lambda < \mu$	*b*)	$\lambda < \mu < 0$
c)	$\lambda < 0 < \mu$	*d*)	$\lambda = 0 \ , \ \mu > 0.$

2.13.– Hallar la solución general del sistema diferencial $X' = A(t)X$, siendo

$$A(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{t+1} & \dfrac{1}{(t+1)^2} \\ 0 & \dfrac{-1}{t+1} \end{bmatrix} \qquad (t > -1).$$

2.14.– Sea $(x(t), y(t))$ la solución del sistema diferencial

$$x'(t) = -3x(t) \quad ; \quad y'(t) = -2y(t)$$

tal que $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Calcular el área del recinto plano acotado limitado por los puntos (x_0, y_0) tales que

$$\int_0^{+\infty} [3x^2(t) + 2y^2(t)]\, dt = 1.$$

2.15.– Hallar la ecuación cartesiana de la órbita del sistema diferencial $X' = AX$, que pasa por el punto $(1, 1)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

2.16.– Se considera el sistema diferencial lineal autónomo plano:

$$\text{(S)} \quad X'(t) = AX(t) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

a) Hallar la ecuación cartesiana de cada recta del plano que esté constituida por órbitas de (S).
b) Dibujar el espacio de fases de (S) y decidir la estabilidad de los puntos de equilibrio.

2.17.– Resolver el problema de valor inicial

$$X'(t) = AX(t)+B(t) \quad , \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A := \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.18.– Se considera el sistema diferencial lineal con coeficientes variables:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{t}{t^2+1} & -\dfrac{1}{t^2+1} \\ \dfrac{1}{t^2+1} & -\dfrac{t}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}. \qquad (S)$$

Se pide:

1. Transformar el sistema (S) en otro equivalente en coordenadas polares.
2. Dibujar la trayectoria de la curva solución de (S) que en $t = 0$ pasa por el punto $(1, 1)$. Especificar las características geométricas de dicha trayectoria.
3. Describir el comportamiento cuando $t \to +\infty$ de todas las soluciones de (S).

2.19.– Hallar la solución del problema de valor inicial
$X'(t) = AX(t) + B(t), \quad X(0) = X_0$, con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.20.– Hallar la solución general del sistema diferencial $X'(t) = AX(t)$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.21.– Se considera el sistema diferencial real lineal de primer orden y con coeficientes constantes:

$$\text{(S)} \qquad X'(t) = AX(t) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Escribir la solución general en $\mathbf{R}^3$ del sistema (S) en términos de los autovalores y autovectores de la matriz A.

b) Determinar unas ecuaciones cartesianas del lugar geométrico formado por todas las condiciones iniciales $X_0 \in \mathbf{R^3}$ tales que la solución real del sistema (S), $X(t)$ con $X(0) = X_0$, satisface que $\lim_{t\to+\infty} X(t) = (0,0,0)^T$. Describir geométricamente dicho lugar geométrico.

c) Determinar una ecuación cartesiana del lugar geométrico formado por todas las condiciones iniciales $X_0 \in \mathbf{R^3}$ tales que la solución real del sistema (S), $X(t)$ con $X(0) = X_0$, es periódica.

2.22.– Hallar la solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & -5x + 4y + 10 \\ y'' & = & 4x - 5y + 6 \end{array} \right. \quad ; \quad x(0) = y(0) = 0 \ , \ x'(0) = 3 \ , \ y'(0) = -3.$$

2.23.– Hallar la solución del problema de valor inicial $X'(t) = AX(t) + B(t)$, $X(0) = X_0$, en donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix} \quad ; \quad X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2.24.– Se considera el siguiente sistema diferencial lineal plano, dependiente del parámetro $a \in \mathbf{R}$:

$$\text{(S)} \qquad X'(t) = AX(t) \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 2a-a^2 \\ 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Expresar la solución general de (S) en términos de los autovalores y autovectores de la matriz A.

2. Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico de las condiciones iniciales $X_0 \in \mathbf{R}^2$ tales que la solución de (S) $X(t)$ con $X(0) = X_0$ satisface que $\lim_{t\to+\infty} X(t) = (0,0)^T$.

3. Calcular los puntos de equilibrio de (S) y decidir su estabilidad según Lyapunov.

4. Hallar los valores de a para los cuales el eje OX o bien el eje OY están constituidos por órbitas de (S). Para dichos valores de a, dibujar el diagrama de fases de (S).

5. Obtener los valores de a para los cuales el primer cuadrante del plano cartesiano es un conjunto positivamente invariante para (S).

2.25.– Se considera el sistema diferencial lineal con coeficientes constantes:

$$X'(t) = AX(t) \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \ , \ a \in \mathbf{R}.$$

a) Calcular los puntos de equilibrio del sistema diferencial y decidir su estabilidad según Lyapunov, para los diferentes valores del parámetro real a.
b) Clasificar el sistema lineal según los diferentes valores del parámetro real a.
c) Dibujar el espacio de fases para $a = 1$.

2.26.– Se considera el sistema diferencial lineal de primer orden y coeficientes variables:

$$\text{(S)} \qquad X'(t) = A(t)X(t) \quad ; \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 + a\cos^2 t & 1 - a\,\mathrm{sen}\,t\cos t \\ -1 - a\,\mathrm{sen}t\cos t & -1 + a\,\mathrm{sen}^2 t \end{pmatrix}.$$

a) Efectuar en (S) el cambio de función incógnita:

$$X(t) = P(t)Y(t) \quad , \quad P(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \mathrm{sen}\,t \\ -\mathrm{sen}\,t & \cos t \end{pmatrix}.$$

b) Hallar la solución general del sistema diferencial obtenido en la incógnita $Y(t)$.

c) Hallar la solución de (S) $X(t)$ tal que $X(0) = (x_0, y_0)^T \in \mathbf{R}^2$.

d) Calcular los valores de $a \in \mathbf{R}$ para los cuales todas las soluciones $X(t)$ de (S) satisfacen que $\lim_{t\to+\infty} X(t) = (0,0)^T$.

e) Calcular los valores de $a \in \mathbf{R}$ para los cuales (S) tiene soluciones periódicas. Determinar dichas soluciones periódicas y dibujar las correspondientes órbitas en el espacio de fases.

Tema 3.– ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n Y COEFICIENTES CONSTANTES.

3.1.– Escribir la solución general de cada una de las siguientes E.D.O.:

$$\begin{array}{llcll} 1) & y'' - 2y' = 0 & ; & 2) & y'' - 6y' + 9y = 0 \\ 3) & y^{iv} + 2y'' + y = 0 & ; & 4) & y'' - 2y' - 2y = 0 \\ 5) & y'' + 4y = 0 & ; & 6) & y''' + y' = 0. \end{array}$$

3.2.– Determinar una E.D.O. lineal homogénea con coeficientes reales constantes, de orden mínimo, que admita la solución particular

$$y = xe^{2x}\,\mathrm{sen}\,x.$$

Escribir la solución general de dicha E.D.O.

3.3.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O.

$$
\begin{array}{llll}
1) & x''' + 2x'' + x' + 2x = \operatorname{sen} t + 1 & ; & 2) \quad y'' + 4y' = \sec x \\
3) & y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \log x + 2e^x & ; & 4) \quad 4y''' + 4y' = \operatorname{tg} x \\
5) & y'' - 6y' + 9y = e^{2x} & ; & 6) \quad y'' + 3y' + 2y = e^x + \operatorname{sen} x
\end{array}
$$

3.4.– Encontrar la solución de cada uno de los siguientes problemas de valores iniciales.

$$
\begin{array}{llll}
1) & x''' + 2x'' + x' + 2x = e^{-2t} & ; & x''(0) = x'(0) = x(0) = 0 \\
2) & x''' - 3x'' + 3x' - x = e^t & ; & x(0) = 1 \ , \ x'(0) = x''(0) = 0.
\end{array}
$$

3.5.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O., sabiendo que tienen soluciones particulares de la forma que se indica.

$$
\begin{array}{llll}
1) & (x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0 & ; & y_P = ax^2 + bx + c \\
2) & (x - 1)y'' - xy' + y = 0 & ; & y_P = e^{ax} \\
3) & (x - 1)y'' - xy' + y = (x - 1)^2 e^{2x} & &
\end{array}
$$

3.6.– Hallar la solución general de cada una de las siguientes E.D.O.

$$
\begin{array}{llll}
1) & x^3 y''' = 1 & ; & 2) \quad x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 4x^2 + 2 \\
3) & 2x^2 y'' - xy' + y = x^2 & ; & 4) \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x \log x \\
5) & x^2 y'' + xy' + y = \log x & ; & 6) \quad x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \operatorname{sen} x \\
7) & x^2 y'' - 6y = x^4 & &
\end{array}
$$

3.7.– Determinar un cambio de variable de la forma $x = a(t)y$ que transforme la E.D.O.

$$x'' + \frac{2}{t+1} x' + x = 0 \quad (t > -1)$$

en otra equivalente en la incógnita y que no contenga término en y'. Hallar la solución general de la E.D.O. propuesta.

3.8.– Escribir la solución general de la E.D.O.

$$u'' + \frac{1}{t} u' + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right) u = 0.$$

Indicación.– Eligiendo α adecuadamente, el cambio $u = t^\alpha v$ transforma la ecuación en otra con coeficientes constantes.

Escribir la solución general de la E.D.O.

$$u'' + \frac{1}{t} u' + \left(1 - \frac{1}{4t^2}\right) u = 3\sqrt{t} \operatorname{sen} t.$$

3.9.– 1) Determinar la función $g(x)$ para que la E.D.O. lineal de segundo orden con coeficientes variables:

$$y'' + 2(x+2)y' + g(x)y = 0$$

admita dos soluciones $y_1(x)$, $y_2(x)$, tales que $y_2(x) = xy_1(x)$. Calcular dichas soluciones.

2) Hallar la solución $y = y(x)$ de la E.D.O. anterior que satisface las condiciones $y(0) = y'(0) = 1$.

3.10.– Resolver el problema de valor inicial

$$x^2 y''(x) - 6y(x) = x^4 \quad , \quad y(1) = y'(1) = 0$$

indicando el intervalo máximo de definición de la solución.

3.11.– Hallar la solución general del sistema diferencial

$$5x'' + y' + 2x = 4\cos t \quad ; \quad 3x' + y = 8t\cos t.$$

3.12.– Hallar la solución del problema de valor inicial:

$$y'' + y'\mathrm{tg}\, x - 4y\cos^2 x = \cos 2x \cos^2 x \quad ; \quad y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 2.$$

Indicación.– Efectuar el cambio de variable independiente $t = \mathrm{sen}\, x$.

3.13.– Obtener la solución del problema de valor inicial:

$$xy'' - (x+1)y' + y = 0 \quad , \quad y(1) = 1 \quad , \quad y'(1) = 2$$

sabiendo que admite una solución particular $y_P(x) = e^{ax}$.

3.14.– Hallar la solución general de la ecuación diferencial ordinaria:

$$x'' + x = e^{at}\cos t$$

según los diferentes valores del parámetro real a.

3.15.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0 \quad ; \quad y(0) = 2 \quad ; \quad y'(0) = 0$$

sabiendo que admite una solución particular de la forma $y_P(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbf{R}$.

3.16.– Determinar la solución general de la E.D.O.:

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 0.$$

Nota.– Efectuar el cambio de variable independiente $x = \mathrm{Sh}\, t$.

Determinar la solución del siguiente problema de contorno:

$$(1+x^2)y''(x)+xy'(x)-y(x)=12x\sqrt{1+x^2} \quad , \quad y(0)=0\ ,\ y(1)=5\sqrt{2}.$$

3.17.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$(1+x)y''+xy'-y=0 \quad ; \quad y(0)=2\ ,\ y'(0)=-3$$

sabiendo que la ecuación diferencial admite una solución particular que es un polinomio de primer grado.

3.18.– Hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales:

$$y''(x)-y'(x)\mathrm{cotg}\,x+y(x)\mathrm{sen}^2x=\cos x-\cos^3 x \quad ; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ ,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2.$$

Indicación.– Efectuar el cambio de variable independiente $t=-\cos x$.

3.19.– Hallar la solución $y(x)$ de la E.D.O.:

$$y''(x)-2y'(x)+\left(1-\frac{6}{x^2}\right)y(x)=4e^x \quad ; \quad y(0)<+\infty \quad , \quad y(1)=0.$$

Indicación.– Hacer el cambio de función incógnita: $y(x)=e^xv(x)$.

3.20.– Hallar la solución general de la E.D.O. siguiente, según los diferentes valores del parámetro real a.

$$y^{(IV)}(x)=y(x)+2e^{ax}.$$

Tema 4.– SISTEMAS DIFERENCIALES NO LINEALES.

4.1.– Se considera el problema de valor inicial

$$x'(t)=(\cos t)x^2(t) \quad ; \quad x(0)=x_0. \qquad (*)$$

Se pide:

1. Determinar el intervalo máximo de definición de la solución de (*) para los diferentes valores de la condición inicial $x_0\geq 0$.

2. Representar gráficamente la solución de (*) en cada uno de los casos siguientes:
$$x_0=0 \quad ; \quad x_0=\frac{1}{2} \quad ; \quad x_0=1.$$

4.2.– Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = x^2y - y \quad ; \quad y' = x - xy^2.$$

Se pide:

1) Puntos de equilibrio y estudio de su estabilidad mediante la linealización. Determinar los puntos de equilibrio cuya estabilidad no puede decidirse linealizando.

2) Determinar una constante a tal que la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + ax^2y^2$$

sea una integral primera del sistema. Dibujar la curva de nivel $f(x, y) = 1$ y representar el campo vectorial asociado al sistema sobre los puntos de esa curva de nivel.

3) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio no resueltos en el primer apartado, tratando de encontrar apropiadas funciones de Lyapunov.

4) Determinar y dibujar en el plano el conjunto de puntos (a, b) que, tomados como condición inicial para $t = 0$, determinan semitrayectorias acotadas para $t \geq 0$. Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson, estudiar la posible existencia de órbitas cerradas.

5) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

4.3.– Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' = x^2 + y - 1 \quad , \quad y' = -2xy.$$

Se pide:

1) Puntos de equilibrio y estudio de su estabilidad por linealización. Determinar los puntos de equilibrio cuya estabilidad no se puede decidir por linealización.

2) Determinar una constante a para que la función

$$f(x, y) = ax^2y + y^2 - ay$$

resulte ser una integral primera del sistema. Dibujar la curva de nivel $f(x, y) = 0$ y representar el campo vectorial asociado al sistema sobre los puntos de esa curva de nivel.

3) Estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio no resueltos en el primer apartado, tratando de encontrar adecuadas funciones de Lyapunov.

4) Obtener y discutir las consecuencias que en este sistema se deducen de los teoremas de Poincaré y Poincaré-Bendixson.

5) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

4.4.– La función $f(x,y) = 2x - 4\operatorname{arctg} x - y^2$ es una integral primera del sistema diferencial autónomo plano

$$x' = x^2 y + y \quad , \quad y' = v(x,y).$$

Determinar los puntos de equilibrio del sistema y estudiar su estabilidad en el sentido de Lyapunov.

4.5.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano

$$x' = 2xy \quad , \quad y' = y^2 - x^2.$$

Se pide:

1) Puntos de equilibrio y su estabilidad según Lyapunov, órbitas cerradas y ciclos límite.

2) Prolongación en el tiempo hacia el futuro de las distintas soluciones. Integrales primeras no constantes definidas en todo el espacio de fases.

3) Dibujo de las órbitas en el plano de fases, determinando sus características geométricas.

4.6.– En cada uno de los tres sistemas diferenciales siguientes, estudiar la estabilidad del origen de coordenadas:

$$1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y - x\,(x^2+y^2) \\ y' & = & -x - y\,(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

$$2) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + x\,(x^2+y^2) \\ y' & = & -x + y\,(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

$$3) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y + xy \\ y' & = & -x + y^2 \end{array} \right.$$

Este ejercicio tiene por objeto mostrar tres sistemas no lineales con distinta estabilidad del origen en cada uno de ellos, pero cuya linealización coincide (el origen es un centro para los sistemas linealizados).

4.7.– Para cada valor del parámetro real a, se considera el sistema diferencial autónomo plano

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2 - y \\ y' & = & a - y. \end{array} \right.$$

1) Determinar los puntos de equilibrio y estudiar su estabilidad según los diferentes valores de a.

2) Estudiar la existencia de órbitas cerradas y ciclos límite según los diferentes valores de a.

3) Dibujar el espacio de fases en el caso $a = 1$.

4.8.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 2xy \\ y' & = & 9 - x^2 + y^2. \end{array} \right.$$

Se pide:

1) Hallar una integral primera de la forma

$$f(x,y) = xg\left(x^2+y^2\right) \ , \quad f(1,0) = -1.$$

Dibujar las curvas de nivel 0, 1, -1 de esa integral primera. Describir el aspecto geométrico de todas las curvas de nivel de esa integral primera.

2) Determinar los puntos de equilibrio, estudiar su estabilidad y su estabilidad asintótica.

3) Estudiar la existencia de trayectorias periódicas (órbitas cerradas).

4) Determinar explícitamente la solución del sistema que pasa por $(0,0)$ cuando $t=0$. Estudiar la prolongación de esta solución en el tiempo, hacia el futuro y hacia el pasado.

5) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

4.9.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$x' = y - y^3 \quad , \quad y' = x - x^3.$$

Se pide:

1) Obtener una integral primera del sistema diferencial y dibujar la curva de nivel que contiene al origen. Dibujar el campo vectorial sobre dicha curva de nivel de la integral primera.

2) Calcular los puntos de equilibrio del sistema y determinar su estabilidad en el sentido de Lyapunov.

3) Aplicando los teoremas de Poincaré y Poincaré-Bendixson, determinar la posible existencia de órbitas cerradas.

4) Hacer un dibujo cuidadoso de las órbitas en el espacio de fases.

5) Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las diferentes trayectorias.

4.10.– Se trata de estudiar la propagación de una enfermedad infecciosa en una población. Se supone que un individuo que sufre la enfermedad queda después permanentemente inmunizado. El modelo del proceso de propagación de la enfermedad es

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} S'(t) & = & -aS(t)E(t) \\ E'(t) & = & aS(t)E(t) - bE(t) \end{array} \right.$$

donde $S(t)$, $E(t)$ representan respectivamente a los susceptibles (individuos que pueden contraer la enfermedad) y enfermos (individuos enfermos y que pueden contagiar a los susceptibles), en el instante t. Las constantes $a>0$, $b>0$ son respectivamente el *coeficiente de transmisión* y el *coeficiente de inmunización* de la enfermedad.

Se pide:

1) Determinar una integral primera del sistema diferencial (*). Dibujar sus curvas de nivel y especificar el espacio de fases.

2) Obtener los puntos de equilibrio de (*) y decidir su estabilidad según Lyapunov. Estudiar la posible existencia de órbitas cerradas y ciclos límite.

3) Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

4) Especificar el conjunto de condiciones iniciales (S_0, E_0) para las cuales la enfermedad está en expansión. Se dispone de una vacuna que disminuye instantáneamente el número de susceptibles. Si el estado inicial es (S_0, E_0) en expansión, calcular el número mínimo de individuos susceptibles que hay que vacunar para que la epidemia empiece a estar en retroceso.

4.11.–Se considera el siguiente sistema diferencial plano, definido en el primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(1-x-ay) \\ y'(t) & = & y(2-x-2y) \end{array} \right.$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$.

Se pide:

1. Obtener los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad, según los diferentes valores del parámetro a.

2. Dibujar las órbitas en el espacio de fases, distinguiendo según los valores de a.

3. El sistema diferencial (S) es un modelo simplificado de la dinámica de dos especies animales de densidades de población $x(t)$ e $y(t)$, que viven en un mismo ecosistema y que compiten por los mismos recursos. Determinar los valores de a para los cuales ambas poblaciones coexisten.

4.12.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x(1+x^2) \\ y' & = & 2x^2y \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Obtener una integral primera de (S) y dibujar sus diferentes curvas de nivel.

2. Determinar los puntos de equilibrio del sistema (S) y decidir su estabilidad según Lyapunov. Estudiar la existencia de órbitas cerradas.

3. Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

4. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las soluciones del sistema (S).

4.13.– Se considera el campo de fuerzas

$$F(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

definido sobre la recta real, es decir, el vector $F(x)$ tiene la misma dirección que la recta. Se pide:

1. Escribir la segunda ley de Newton para la dinámica de un punto material de masa $m = 1$ sometido a dicho campo de fuerzas. Transformar la ecuación diferencial de segundo orden anterior en un sistema diferencial de primer orden equivalente en las variables $x_1 = x$, $x_2 = x'$. Determinar los puntos de equilibrio de dicho sistema.

2. Si se trata de un sistema mecánico conservativo, calcular la energía potencial $U(x_1)$ tal que $U(0) = 0$. Escribir una integral primera del sistema e interpretarla en términos mecánicos.

3. Representar gráficamente $U(x_1)$, especificando sus posibles máximos y mínimos. Dibujar las curvas de nivel de la energía total, eligiendo suficientes casos significativos. Dibujar en el espacio de fases (x_1, x_2) las distintas órbitas del sistema.

4. Si el punto material se encuentra inicialmente en la posición $x = -1$, calcular las velocidades iniciales que se deben imprimir a la partícula para conseguir que llegue a alcanzar una posición $x > 1$.

4.14.– Se considera el campo de fuerzas

$$F(x) = -\frac{1}{x^3} \quad , \quad x > 0$$

definido sobre la semirrecta real positiva, es decir, el vector $F(x)$ tiene la misma dirección que la recta. Se pide:

1. Escribir la segunda ley de Newton para la dinámica de un punto material de masa $m = 1$ sometido a dicho campo de fuerzas. Transformar la ecuación diferencial de segundo orden anterior en un sistema diferencial de primer orden equivalente en las variables $x_1 = x$, $x_2 = x'$.

2. Si se trata de un sistema mecánico conservativo, calcular la energía potencial $U(x_1)$ tal que $U(0) = -1/2$. Escribir una integral primera del sistema e interpretarla en términos mecánicos.

3. Representar gráficamente $U(x_1)$, $x > 0$. Sea E la energía total del sistema. Dibujar las curvas de nivel de la energía total $E = 1$, $E = 0$, $E = -1/2$. Dibujar en el espacio de fases (x_1, x_2) las distintas órbitas del sistema.

4. Si el punto material se encuentra inicialmente en la posición $x = 1$, calcular las velocidades iniciales que se deben imprimir a la partícula para conseguir que se aleje indefinidamente del origen.

5. Si el punto material se encuentra inicialmente en reposo en la posición $x = 1$, calcular el tiempo que tarda en alcanzar el origen.

4.15.– Dos tipos de bacterias A y B conviven en asociación en un mismo sustrato, de manera que sus densidades de población respectivas $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, satisfacen el sistema diferencial

$$x'(t) = \frac{x(y-x)}{x+y} \quad ; \quad y'(t) = \frac{y(x-y)}{x+y}. \qquad (*)$$

Se pide:

1. Especificar el espacio de fases del sistema diferencial (*), encontrar una integral primera y dibujar sus curvas de nivel.

2. Encontrar los puntos de equilibrio de (*), decidir su estabilidad en el sentido de Lyapunov y estudiar la existencia de órbitas cerradas y ciclos límite.

3. Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases. Si en el instante inicial se tienen las poblaciones $x(0) = a \geq 0$, $y(0) = b \geq 0$, especificar el estado final al que tienden ambas poblaciones cuando $t \to +\infty$.

4. La población de la bacteria A puede aumentarse fácilmente por procedimientos artificiales, pero la población de B sólo se puede modificar a través de A. Se supone que en el instante inicial $x(0) = a < y(0) = b$, siendo $a > 0$, y se desea duplicar la presencia de B en el sustrato. ¿Cómo debe modificarse a para que el proceso natural de asociación tienda a duplicar b cuando $t \to +\infty$? Esquematizar el procedimiento en el espacio de fases.

4.16.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$x'(t) = 2\operatorname{sen} x - 2y \quad ; \quad y'(t) = \operatorname{sen} 2x - 2y\cos x.$$

Se pide:

1. Calcular una integral primera y dibujar sus curvas de nivel.

2. Calcular los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad en el sentido de Lyapunov.

3. Estudiar la existencia de órbitas cerradas y ciclos límite.

4. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las soluciones $(x(t), y(t))$ que satisfacen la condición inicial $x(0) = 0$, $y(0) = b$, $b \in \mathbf{R}$.

5. Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

4.17.– Calcular los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov del siguiente sistema diferencial:

$$\begin{cases} x' &= \cos(x+y) + 5\cos(x-y) - 6\cos y \\ y' &= y - x. \end{cases}$$

4.18.–Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$x'(t) = -2y^2(t) \quad ; \quad y'(t) = -y(t).$$

Se pide:

1. Obtener una integral primera y dibujar sus curvas de nivel.

2. Determinar sus puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov.

3. Decidir razonadamente la existencia o no de órbitas cerradas y ciclos límite. Estudiar la prolongación en t hacia el futuro de las distintas soluciones del sistema.

4. Efectuar un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

5. Hallar la solución del sistema $(x(t), y(t))$ tal que $(x(0), y(0)) = (2, 2)$.

4.19.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano dependiente del parámetro $a \in \mathbf{R}$:

$$x' = ay - \frac{x^2}{4} \quad ; \quad y' = ax - y. \qquad (*)$$

Se pide:

1. Calcular sus puntos de equilibrio y decidir su estabilidad, según los posibles valores del parámetro a.

2. Esbozar el espacio de fases del sistema (*) para $a = 0$.

3. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las diferentes órbitas en el caso $a = 0$.

4. El sistema (*) representa un proceso dinámico en el que el parámetro a es un control que puede manipularse libremente. Cuando se fija un valor de a, el proceso se amortigua rápidamente situándose en un equilibrio estable, si tal equilibrio existe. En caso contrario, es decir si no hay equilibrios estables, el proceso tiene un comportamiento explosivo que lo destruye en poco tiempo. Se tiene el proceso estabilizado en el punto $(4,4)$; dibujar en el plano XOY el conjunto de puntos (x,y) que se pueden alcanzar mediante una manipulación continua del control a, sin producir saltos bruscos en las situaciones estabilizadas.

   ¿Puede modificarse de manera continua el control a para llevar el proceso desde el punto $(4,4)$ hasta el punto $(4,-4)$ sin que dicho proceso explote?

4.20.– Calcular los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov del siguiente sistema diferencial autónomo plano:

$$x' = y^2 - 3x + 2 \quad ; \quad y' = x^2 - y^2.$$

4.21.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(x+y-1) \\ y' & = & y(x-y+3) \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Calcular sus puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov.

2. Dibujar el campo vectorial asociado al sistema (S) sobre los ejes coordenados. Estudiar la existencia de órbitas cerradas. **Indicación**: Acéptese que no existen órbitas cerradas completamente contenidas en el cuadrante $x \leq 0$, $y \geq 0$.

3. Hacer un dibujo cuidadoso de las diferentes órbitas en el espacio de fases.

4. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las soluciones del sistema (S), $(x(t), y(t))$, tales que $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $a \in \mathbf{R}$.

4.22.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2y(1-x) \\ y' & = & 3x^2 + y^2 - 2x - 4. \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Calcular los valores de las constantes a y b para los cuales $f(x,y) = (x^2+y^2+a)(x+b)$ es una integral primera del sistema (S). Dibujar la curva de nivel cero de f.

2. Hallar los puntos de equilibrio de (S) y determinar su etabilidad según Lyapunov.

3. Estudiar la existencia de órbitas cerradas y su localización en el plano de fases.

4. Hacer un dibujo cuidadoso de las distintas órbitas en el espacio de fases.

5. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las soluciones de (S) que satisfacen la condición inicial $x(0) = 1$, $y(0) = \beta$, $\beta \in \mathbf{R}$.

4.23.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano:

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -y + xf(x,y) \\ y'(t) & = & x + yf(x,y) \end{array} \right.$$

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\text{sen}\,\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad , \quad f(0,0) = 0.$$

Se pide:

1. Calcular sus puntos de equilibrio.

2. Hallar los valores de r para los cuales la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ es una órbita cerrada de (S).

3. Dibujar la órbita de un punto (x_0, y_0) tal que $1/4 < x_0^2 + y_0^2 < 1$, especificando sus características geométricas. la misma cuestión para $1/9 < x_0^2 + y_0^2 < 1/4$.

4. Esquematizar el espacio de fases de (S). Determinar, si existen, los ciclos límite. Especificar la estructura geométrica de las órbitas en un entorno del origen.

5. Razonar la estabilidad según Lyapunov de la solución nula $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$.

4.24.– En cierto territorio conviven una población de pájaros y otra de insectos, constituyendo esta segunda la fuente de alimentación de la primera. Se designan por $x(t)$ e $y(t)$ las poblaciones respectivas de pájaros (medidos en centenares) y de insectos (medidos en decenas de mil) en el instante t. La evolución de ambas especies está determinada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(-1 - x + y) \\ y'(t) & = & y(3 - x - y). \end{array} \right.$$

Se pide:

1) Especificar el espacio de fases. Hallar los puntos de equilibrio y determinar su estabilidad según Lyapunov.

Con el fin de controlar la plaga de insectos, se utiliza un pesticida que elimina insectos proporcionalmente a su población, modificándose la evolución de ambas especies según el sistema diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(-1-x+y) \\ y'(t) & = & y(3-x-y)-hy. \end{array} \right.$$

2) Especificar el espacio de fases. Hallar los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov, para los diferentes valores de $h > 0$, $h \neq 2$, $h \neq 3$.

3) Interpretar, en términos del modelo, los resultados obtenidos en los apartados anteriores para el comportamiento de las poblaciones en sus valores de equilibrio estable, si existen. Distinguir los diferentes casos según los valores de h. ¿Cuál es la situación final del ecosistema si el pesticida es agresivo?

4.25.– Para cada $n = 1, 2, \ldots$, se considera el siguiente sistema diferencial no lineal autónomo plano:

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y - x^n \\ y' & = & x^2 + y^2 - 2 \end{array} \right.$$

Se pide:
a) Representar gráficamente la función real de variable real definida por

$$f(z) = z + z^n - 2 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

Será necesario distinguir los casos n par y n impar.

Como consecuencia, calcular todas las raíces positivas de la ecuación

$$z + z^n - 2 = 0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

b) Calcular los puntos de equilibrio del sistema (S) y decidir su estabilidad según Lyapunov. Distinguir los diferentes casos posibles según los valores de n par o impar.

c) Dibujar el espacio de fases del sistema (S), distinguiendo los diferentes casos según los valores de n par o impar. Acéptese que el sistema (S) no tiene órbitas cerradas en ningún caso.

4.26.– Se considera el sistema diferencial no lineal autónomo plano dependiente del parámetro $a \in \mathbf{R}$:

$$(\mathrm{S}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & y + x(a - x^2 - y^2) \\ y'(t) & = & -x + y(a - x^2 - y^2) \end{array} \right.$$

Se pide:

a) Escribir el sistema (S) en coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\,\theta$.

b) Obtener de manera explícita la solución del sistema (S) en coordenadas polares $(r(t), \theta(t))$, con $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$, para los diferentes valores del parámetro a.

c) Calcular los puntos de equilibrio del sistema (S) y decidir su estabilidad para los diferentes valores del parámetro a.

d) Determinar, si existen, las órbitas cerradas del sistema (S) según los valores del parámetro a.

e) Efectuar un dibujo de las diferentes órbitas en el espacio de fases del sistema (S), distinguiendo los casos posibles según los valores del parámetro a.

4.27.– Se considera el sistema diferencial autónomo plano

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x^2 - y - 1 \\ y' & = & xy - 2y \end{array} \right.$$

1) Hallar sus puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov.
2) Dibujar el campo vectorial definido por (S) sobre cada recta que pase por dos puntos de equilibrio de (S). ¿Existen órbitas cerradas para (S)? Razónese.
3) Dibujar las diferentes órbitas de (S) en el espacio de fases.
4) Calcular las soluciones $(x(t), y(t))$ de (S) tales que $(x(0), y(0))$ pertenece a la recta $y = x + 1$. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de dichas soluciones. Para aquellas soluciones no prolongables indefinidamente hacia el futuro, determinar su intervalo máximo de definición $[0, t^*)$.

4.28.– Se considera el siguiente sistema diferencial no lineal autónomo plano, dependiente del parámetro $a \in \mathbf{R}$:

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & ax + y + x(x^2 + y^2) \\ y' & = & -x + ay + y(x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Efectuar en (S) un cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\,\theta$.

2. Calcular la solución del sistema $(r(t), \theta(t))$ tal que $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$.

3. Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las distintas soluciones. Para aquellas soluciones no prolongables indefinidamente hacia el futuro, determinar su intervalo máximo de definición $[0, t^*)$.

4. Hallar los puntos de equilibrio de (S) y decidir su estabilidad según Lyapunov.

5. Obtener las soluciones periódicas de (S), si existen.

6. Esbozar el diagrama de fases de (S) para $a = -4$.

4.29.– Se considera el siguiente sistema diferencial no lineal autónomo plano, dependiente del parámetro real $R > 0$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& y(x^2 + y^2 - R^2 + 1) \\ y' &=& -x(x^2 + y^2 - R^2 - 1) \end{array} \right.$$

Se sabe que la función

$$f(x, y) = [(x-1)^2 + y^2 - R^2][(x+1)^2 + y^2 - R^2]$$

es una integral primera de (S).

En cada una de las siguientes cuestiones hay que distinguir distintos casos según los valores de $R > 0$. Se pide:

1. Dibujar la curva de nivel cero de f y dibujar el campo vectorial definido por (S) sobre dicha curva de nivel.

2. Hallar los puntos de equilibrio de (S) y decidir su estabilidad según Lyapunov.

3. Determinar la posible existencia de órbitas cerradas para (S).

4. Dibujar el espacio de fases de (S) y estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las distintas soluciones de (S).

4.30.– Se considera el siguiente sistema diferencial autónomo plano:

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& -y + (x-y)(x^2 + y^2 - 1) \\ y' &=& x + (x+y)(x^2 + y^2 - 1) \end{array} \right.$$

a) Escribir el sistema (S) en coordenadas polares $(r(t), \theta(t))$.
b) Hallar la solución del sistema (S), $(r(t), \theta(t))$, tal que $r(0) = r_0 > 0$, $\theta(0) = \theta_0$.
c) Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las soluciones obtenidas en el apartado anterior. Para aquellas soluciones definidas en un intervalo máximo acotado $[0, t^*)$, calcular $t^* > 0$.
d) Hallar los puntos de equilibrio de (S) y decidir su estabilidad según Lyapunov. Determinar las órbitas cerradas de (S), si existen.
e) Efectuar un dibujo del espacio de fases del sistema diferencial (S).

4.31.– Se considera el siguiente sistema diferencial plano, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) &=& x(1 - x^2) - axy \\ y'(t) &=& y(1 - y) \end{array} \right.$$

En cada una de las siguientes cuestiones han de distinguirse los casos posibles, según los diferentes valores de $a \in \mathbf{R}$. Se pide:

a) Dibujar el campo vectorial asociado al sistema sobre las rectas $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$.

b) Obtener los puntos de equilibrio del sistema y decidir su estabilidad según Lyapunov.

c) Decidir razonadamente la posible existencia de órbitas cerradas del sistema.

d) Dibujar las órbitas en el espacio de fases.

e) Estudiar la prolongación en el tiempo hacia el futuro de las soluciones del sistema $(x(t), y(t))$ tales que $x(0) = 0$, $y(0) = \beta$, $\beta \in \mathbf{R}$. Para aquellas soluciones definidas en un intervalo máximo acotado $[0, t^*)$, calcular t^*.

4.32.– Se considera el siguiente sistema diferencial no lineal plano:

$$x' = y \quad ; \quad y' = \frac{-x + by}{y^2 + 1}.$$

Calcular los puntos de equilibrio y decidir su estabilidad según Lyapunov, para los diferentes valores del parámetro real b.

Tema 5.– INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.– MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES.

5.1.– Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y periódica de periodo $2T > 0$. Demostrar que

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad , \quad \int_a^{a+2T} f(x)\, dx = \int_0^{2T} f(x)\, dx.$$

5.2.– Hallar los coeficientes del desarrollo formal en serie trigonométrica de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$$

en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2 \quad ; \quad \text{b)} \quad f(x) = \cos(x/2) \quad ; \quad \text{c)} \quad f(x) = \operatorname{Ch} x.$$

5.3.– Hallar los coeficientes del desarrollo formal en serie trigonométrica de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$$

en cada uno de los siguientes casos:

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|} \quad ; \quad \text{b)} \quad f(x) = x \quad ; \quad \text{c)} \quad f(x) = x \cos x.$$

5.4.– Hallar los coeficientes de cada uno de los siguientes desarrollos formales en serie trigonométrica de Fourier:

$$\text{a)}\quad 2-\frac{2x}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \qquad 0\le x\le \pi$$

$$\text{b)}\quad 1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx \qquad 0\le x\le \pi$$

$$\text{c)}\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} 2nx \qquad 0\le x\le \pi/2$$

$$\text{d)}\quad \frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2(2n+1)x \qquad 0\le x\le \pi/4$$

$$\text{e)}\quad \cos 2x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} 2nx \qquad 0\le x\le \pi/2$$

$$\text{f)}\quad x+1=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen} nx+\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos\frac{2n+1}{2}x \qquad -\pi\le x\le \pi$$

5.5.– Sumar la serie de Fourier

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x+\frac{1}{2^2}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{2^3}\operatorname{sen} 3x+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{sen} nx+\cdots$$

5.6.– Hallar los autovalores y autofunciones del problema $X''(x)=\lambda X(x)$ con cada una de las siguientes condiciones de contorno:

a) $X(0)=X(\pi)=0$; b) $X(-\pi)=X(\pi)=0$; c) $X(0)=X(\pi/2)=0$
d) $X(0)=X'(\pi/2)=0$; e) $X'(0)=X(\pi/4)=0$

5.7.– Hallar los autovalores y autofunciones del siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} X^{IV}(x)=\lambda X(x) \\ X'(0)=X'(\pi)=X'''(0)=X'''(\pi)=0. \end{cases}$$

5.8.– Aplicando el método de separación de variables, encontrar una solución $u(x,t)$ del siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)+16\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)=0\ , && 0<x<2\pi\ ,\quad t>0\\
&u(0,t)=u(2\pi,t)=0\ , && t\ge 0\\
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2\pi,t)=0\ , && t\ge 0\\
&u(x,0)=x\ , && 0\le x\le 2\pi\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=8\operatorname{sen} x\,, && 0\le x\le 2\pi\,.
\end{aligned}$$

5.9.– Aplicando el método de separación de variables, encontrar la solución del siguiente problema de valor inicial y de contorno

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 6\,\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + 5u(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad 0 < x < \pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

en cada uno de los casos siguientes:

1) $g(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen} 3x - 3\operatorname{sen} 4x$.

2) $g(x) = x(\pi - x)$.

5.10.– Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución del siguiente problema de contorno para la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi \ , \ 0 < y < 2\pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad , \quad 0 < y < 2\pi \\ u(x,0) = u(x,2\pi) = 4\operatorname{sen} x \quad , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

5.11.– Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \ , \ t \ge 0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen} 2\pi x \quad ; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = x(1-x) \quad , \quad 0 \le x \le 1. \end{array}$$

5.12.– Aplicando el método de separación de variables, hallar la solución del siguiente problema de valores iniciales y de contorno:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + 2\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad , \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \ , \ t > 0 \\ u\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 6\cos 3x - 15\cos 5x \quad , \quad 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$