

Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales

PROGRAMA DE CÁLCULO II.

Tema 1. Integrales impropias.

1.1. Integrales sobre intervalos no acotados. Definición y noción de convergencia. Integrales de integrandos no negativos. Criterios de convergencia: criterio de acotación, de comparación y de comparación del cociente. Integrales con integrandos no necesariamente positivos. El criterio de Cauchy e integrales absolutamente convergentes.

1.2. Integrales de integrandos no acotados.

Definición y propiedades en todo equivalentes a las enunciadas para las integrales sobre intervalos no acotados.

Tema 2. Series numéricas.

2.1. Definición de serie numérica. Noción de convergencia. Algunas series notables: la serie geométrica y la serie armónica. Condición previa de convergencia. Condición necesaria y suficiente de convergencia (criterio de Cauchy). Operaciones elementales con series.

2.2. Series de términos no negativos: criterios de comparación y de comparación del cociente. Criterios del cociente, de la raíz y de la integral.

2.3. Series alternadas: el criterio de Leibniz. Estimación de la suma de una serie alternada convergente. La constante de Euler.

2.4. Series de términos cualesquiera. Series absolutamente convergentes. Criterios de la raíz y el cociente para series de términos cualesquiera.

Tema 3. Series de potencias.

3.1. Definición. Radio de convergencia de una serie de potencias. Fórmula de Cauchy-Hadamard. Álgebra de las series de potencias.

3.2. Derivación e integración de una serie de potencias. Teorema de Abel. Series de Taylor.

Tema 4. El espacio \mathbb{R}^n .

4.1. El espacio vectorial \mathbb{R}^n . Producto escalar. Norma euclídea. Desigualdades de Schwarz y de Minkowski. Espacios normados. Normas equivalentes. Límites de sucesiones de vectores. Completitud de \mathbb{R}^n .

4.2. Topología básica de \mathbb{R}^n .

Bola abierta. Punto interior. Conjuntos abiertos y propiedades. Punto frontera. Punto adherente. Conjuntos cerrados y propiedades. Punto de acumulación. Teorema de Bolzano Weierstrass.

Tema 5. Límite y continuidad de aplicaciones.

5.1. Definición de continuidad. Definición de límite. Álgebra de límites y de funciones continuas. Continuidad y límites. Continuidad y convergencia.

5.2. Propiedades de las funciones continuas.

Conjuntos compactos. Caracterización de los compactos de \mathbb{R}^n . Imagen continua de un compacto.

Tema 6. Diferenciación de aplicaciones.

6.1 Derivación parcial.

Definición de derivada parcial. Significado geométrico y físico. Cálculo de las derivadas parciales. Derivadas según un vector. Derivadas parciales de una función vectorial. Gradiente de un campo escalar.

6.2 Diferenciación.

Noción de diferencial de una aplicación. Interpretación de la diferencial. Álgebra de las funciones diferenciables. Condiciones necesarias de diferenciabilidad. Matriz jacobiana. Relación de la diferencial de una aplicación con las diferenciales de sus funciones componentes. Derivada direccional máxima. Condición suficiente de diferenciabilidad.

Tema 7. Diferenciación de la aplicación compuesta y aplicaciones.

7.1. Diferencial de la aplicación compuesta (regla de la cadena). Matriz jacobiana de la aplicación compuesta. Algunos casos especiales: fórmula de los incrementos finitos para una función de varias variables, derivación de funciones definidas por integrales (regla de Leibniz).

7.2. Campos escalares y vectoriales en \mathbb{R}^3 . Curvas en el espacio. Derivada de un campo a lo largo de una curva. Plano tangente a una superficie en forma explícita. Plano tangente a una superficie en forma paramétrica. Plano tangente a una superficie de nivel.

Tema 8. Derivadas sucesivas. Fórmula de Taylor.

8.1. Derivadas sucesivas.

Derivadas segundas. Ecuaciones de Laplace, del calor y de ondas. Igualdad de las derivadas cruzadas. Derivadas sucesivas.

8.2. Fórmula de Taylor.

Definición de matriz hessiana. Aproximación local de una función dos veces diferenciable. Fórmula de Taylor.

Tema 9. Aplicaciones inversa e implícita.

9.1. Aplicación inversa. El caso $n = 1$. Inversión de una aplicación lineal afín. El teorema de la aplicación inversa. Matriz jacobiana y determinante jacobiano de la inversa.

9.2. Aplicación implícita. Aplicaciones definidas implícitamente. Teorema de la aplicación implícita. Matriz jacobiana y derivadas de la función implícita.

Tema 10. Extremos libres.

10.1. Condiciones necesarias.

Extremos locales. Condición necesaria de primer orden. Puntos estacionarios. Condiciones necesarias de segundo orden.

10.2. Condiciones suficientes.

Formas cuadráticas reales. Formas definidas positivas y definidas negativas. Criterio de Sylvester. Condiciones suficientes de extremo local.

Tema 11. Extremos condicionados.

11.1. Condiciones necesarias.

Planteamiento del problema. El caso $n = 2$. Teorema de los multiplicadores de Lagrange.

11.2. Condiciones suficientes.

Condiciones suficientes. Sensibilidad.

BIBLIOGRAFÍA.

Libros de Teoría.

- **Riaza R. y Alvarez M.** Cálculo infinitesimal. Sociedad de Amigos de la E.T.S.I. Industriales U.P.M.
- **Courant R. y John F.** Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Ed. Limusa.
- **Marsden J. y Tromba.** Cálculo Vectorial. Ed. Addison-Wesley.

Libros de Problemas.

- **Ruiz J.** Cuestiones de Cálculo. Varios ejemplares están a disposición de los alumnos en la biblioteca de la E.T.S.I. Industriales U.P.M.
- **Liashkó I.I. et al.** Matemática Superior. Problemas resueltos. Ed. URSS.
- **García P., Riaza R., Rincón A. y Tablada M.** Problemas de Cálculo Infinitesimal. Cálculo II. Sección de Publicaciones E.T.S.I. Industriales U.P.M.
- **Fernandez L., García P., Rincón A. y Tablada M.** Problemas de Examen. Cálculo II. Sección de Publicaciones E.T.S.I. Industriales U.P.M.