

# Grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales.

## PROGRAMA DE CÁLCULO II. CURSO 2016-17.

### Tema 1. Series numéricas.

**1.1.** Definición de serie numérica. Noción de convergencia. Algunas series notables: la serie geométrica y la serie armónica. Condición previa de convergencia. Condición necesaria y suficiente de convergencia (criterio de Cauchy). Operaciones elementales con series.

**1.2.** Series de términos no negativos: criterios de comparación y de comparación del cociente. Criterios del cociente y de la raíz. Definición de integral impropia sobre intervalo no acotado y su convergencia. Criterio de la integral.

**1.3.** Series alternadas: el criterio de Leibniz. Estimación de la suma de una serie alternada convergente.

**1.4.** Series de términos cualesquiera. Series absolutamente convergentes. Criterios de la raíz y el cociente para series de términos cualesquiera.

### Tema 2. Series de potencias.

**2.1.** Definición. Radio de convergencia de una serie de potencias. Fórmula de Cauchy-Hadamard. Álgebra de las series de potencias.

**2.2.** Derivación e integración de una serie de potencias. Teorema de Abel. Series de Taylor.

### Tema 3. Aplicaciones de varias variables. Límite y continuidad.

**3.1.** El espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ . Producto escalar. Norma euclídea. Desigualdades de Schwarz y de Minkowski. Límites de sucesiones de vectores. Completitud de  $\mathbb{R}^n$ . Topología básica de  $\mathbb{R}^n$ .

**3.2.** Aplicaciones de varias variables. Definición de continuidad. Definición de límite. Álgebra de límites y de funciones continuas. Continuidad y límites. Continuidad y convergencia. Propiedades de las funciones continuas. Conjuntos compactos. Caracterización de los compactos de  $\mathbb{R}^n$ . Imagen continua de un compacto.

### Tema 4. Diferenciación de aplicaciones.

**4.1.** Derivación parcial.

Definición de derivada parcial. Significado geométrico y físico. Cálculo de las derivadas parciales. Derivadas según un vector. Derivadas parciales de una función vectorial. Gradiente de un campo escalar.

**4.2.** Diferenciación.

Noción de diferencial de una aplicación. Interpretación de la diferencial. Álgebra de las funciones diferenciables. Condiciones necesarias de diferenciabilidad. Matriz jacobiana.

Relación de la diferencial de una aplicación con las diferenciales de sus funciones componentes. Derivada direccional máxima. Condición suficiente de diferenciabilidad.

## **Tema 5. Diferenciación de la aplicación compuesta y aplicaciones.**

**5.1.** Diferencial de la aplicación compuesta (regla de la cadena). Matriz jacobiana de la aplicación compuesta. Algunos casos especiales: fórmula de los incrementos finitos para una función de varias variables, derivación de funciones definidas por integrales (regla de Leibniz).

**5.2.** Campos escalares y vectoriales en  $\mathbb{R}^3$ . Curvas en el espacio. Derivada de un campo a lo largo de una curva. Plano tangente a una superficie en forma explícita. Plano tangente a una superficie en forma paramétrica. Plano tangente a una superficie de nivel.

## **Tema 6. Derivadas sucesivas. Fórmula de Taylor.**

**6.1.** Derivadas sucesivas.

Derivadas segundas. Ecuaciones de Laplace, del calor y de ondas. Igualdad de las derivadas cruzadas. Derivadas sucesivas.

**6.2.** Fórmula de Taylor.

Definición de matriz hessiana. Aproximación local de una función de clase dos. Fórmula de Taylor.

## **Tema 7. Aplicaciones inversa e implícita.**

**7.1.** Aplicación inversa. El caso  $n = 1$ . Inversión de una aplicación lineal. El teorema de la aplicación inversa. Matriz jacobiana y determinante jacobiano de la inversa.

**7.2.** Aplicación implícita. Aplicaciones definidas implícitamente. Teorema de la aplicación implícita. Matriz jacobiana y derivadas de la función implícita.

## **Tema 8. Extremos.**

**8.1.** Extremos libres.

Extremos locales. Condición necesaria de primer orden. Puntos estacionarios. Condiciones necesarias de segundo orden.

Formas cuadráticas reales. Formas definidas positivas y definidas negativas. Criterio de Sylvester. Condiciones suficientes de extremo local.

**8.2.** Extremos condicionados.

Planteamiento del problema. El caso  $n = 2$ . Teorema de los multiplicadores de Lagrange.

## **Tema 9. Integral múltiple.**

**9.1.** Integración doble sobre rectángulos y triples en ortoedros. Interpretación geométrica. Propiedades elementales. Integración reiterada. Teorema de Fubini.

Integrales múltiples sobre regiones generales.

**9.2.** Cambio de variables.

El jacobiano como factor de dilatación. Coordenadas polares en el plano. Coordenadas esféricas y cilíndricas en el espacio. Propiedades de simetría.

Aplicaciones geométricas y físicas de la integral múltiple: áreas y volúmenes, masa de un sólido, centro de gravedad, teorema de Guldin y momentos de inercia.

## BIBLIOGRAFÍA.

### Libros de Teoría.

- **Courant R. y John F.** Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Ed. Limusa.
- **Marsden J. y Tromba.** Cálculo Vectorial. Ed. Addison-Wesley.
- **Rogawski J.** Cálculo varias variables. Ed. Reverté.
- **Zill D. y Wright W.** Cálculo de varias variables. Ed. McGrawHill

### Libros de Problemas.

- **Liashkó I.I. et al.** Matemática Superior. Problemas resueltos. Ed. URSS.
- **García P., Rianza R., Rincón A. y Tablada M.** Problemas de Cálculo Infinitesimal. Cálculo II. Sección de Publicaciones E.T.S.I.Industriales U.P.M.
- **Fernandez L., García P., Rincón A. y Tablada M.** Problemas de Examen. Cálculo II. Sección de Publicaciones E.T.S.I.Industriales U.P.M.