

E.T.S. de INGENIEROS INDUSTRIALES DE LA U.P.M.
GRADO DE INGENIERÍA QUÍMICA
PROGRAMA DE CÁLCULO I

Los números reales.

Recordatorio de las propiedades de los números enteros. El cuerpo de los números racionales. Ordenación de los racionales. Suma y producto de desigualdades. Valores absolutos y sus propiedades. La noción de cuerpo ordenado. Representación geométrica de los números racionales. Insuficiencia de los números racionales: la diagonal de un cuadrado no es conmensurable con el lado. Conjuntos acotados. Supremo de un conjunto. Prueba de que el conjunto de números racionales cuyo cuadrado es menor que 2 no tiene supremo racional. El axioma de supremo. Cuerpos ordenados completos.

Sucesiones.

Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes: aritmética, geométrica y aritmético-geométrica. Sucesiones convergentes. Unicidad del límite. Operaciones con sucesiones convergentes. Sucesiones acotadas. Sucesiones monótonas. Definición del número e . Noción de serie numérica. La serie geométrica. Sucesiones de Cauchy. Completitud del sistema de los números reales.

Funciones continuas.

La noción de función. Gráfica de una función. Operaciones algebraicas con funciones. Composición de funciones. Funciones continuas en un punto. Convergencia y continuidad. El teorema de Bolzano. Existencia de soluciones en las ecuaciones polinómicas de grado impar. Funciones acotadas. Valores extremos de funciones continuas en un intervalo compacto.

Funciones derivables.

Límites puntuales de una función. Definición de derivada de una función en un punto. Derivación de la función potencial. Derivación de la función seno. Continuidad de las funciones derivables. Derivación de productos y cocientes de funciones. La regla de la cadena. Derivación de la función inversa. El esquema iterativo de Newton para la solución numérica de ecuaciones.

Aplicaciones de la derivada.

Extremos locales de una función. Teorema de Fermat. Ejemplos de cálculo de máximos y mínimos. División de polinomios. El teorema del resto. Teorema de Rolle para polinomios. Extensión del teorema de Rolle a funciones derivables. Determinación de un polinomio por sus ceros. Interpolación polinomial. Fórmula interpolatoria de Lagrange. Acotación del error en la interpolación polinomial. El teorema del valor medio de Lagrange. La fórmula de los incrementos finitos. Estudio del crecimiento de una función derivable. Caracterización de las funciones constantes en un intervalo.

Ecuaciones diferenciales elementales.

Las funciones exponencial y logaritmo. Estudio de la ecuación diferencial lineal de primer orden. Vida media de un átomo radiactivo. Curva de descarga de un condensador a través de una resistencia. La ecuación diferencial lineal de segundo orden. Resolución de la ecuación diferencial del sistema masa-muelle.

Curvatura y convexidad.

Curvas planas parametrizadas. Parametrización de la elipse. Puntos singulares y regulares de una curva parametrizada. Ejemplo de curva parametrizada diferenciable sin tangente. Existencia de tangente a una curva parametrizada en un punto regular. El teorema del valor medio de Cauchy. La regla de L'Hospital Circunferencia osculatriz de una curva plana en un punto. Deducción de la fórmula de la curvatura. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

La fórmula de Taylor.

Polinomios de Taylor de una función. Construcción de los polinomios de Taylor de las funciones exponencial, seno y coseno. Unicidad del polinomio de Taylor. División larga de polinomios. Polinomios de Taylor de una función racional Identificación de los polinomios de Taylor de las funciones arco tangente y logaritmo. Resto de Taylor de una función en un punto. Expresión del resto en la forma de Lagrange.

La integral de Riemann.

Motivación: la noción de área. Sumas de Darboux para una función acotada en un intervalo. Funciones integrables. Sumas de Riemann de una función acotada. Funciones primitivas de una función. La regla de Barrow. Cálculo de volúmenes por secciones. Volumen de un sólido de revolución. Promedio integral de una función y su significado. Valor eficaz de la corriente alterna. Toda función continua es integrable. El teorema de la media del cálculo integral.

Cálculo de primitivas.

Métodos elementales de integración. Descomposición en fracciones simples de una función racional. Existencia de primitivas elementales para funciones racionales. Cálculo de primitivas mediante cambio de variables. Existencia de primitivas elementales para funciones racionales en las funciones seno y coseno. Integración de funciones irracionales con radicandos cuadráticos. La fórmula de integración por partes. Deducción de la fórmula de Taylor con resto integral. Longitud de la gráfica de una función con derivada primera continua. Área de una superficie de revolución. Longitud de arcos parametrizados Longitud de una curva descrita por su ecuación polar.

El teorema fundamental del cálculo.

La integral como función del dominio de integración. Dependencia continua de la integral respecto del límite superior de integración. El teorema fundamental del cálculo. Nueva prueba de la regla de Barrow para la integral de una función continua Existencia de primitivas para las funciones continuas en un intervalo. Revisión de las definiciones de las

funciones logaritmo y arco tangente. Representación integral de una solución particular de la ecuación diferencial y lineal de primer orden. Construcción de la solución general de la ecuación lineal y homogénea de segundo orden. La fórmula de Leibniz para la derivación de integrales paramétricas. Solución fundamental de la ecuación diferencial lineal y homogénea de segundo orden. Representación integral de una solución particular de la ecuación diferencial y lineal de segundo orden.

Series numéricas.

Sucesiones sumables. Sumas parciales. Series numéricas Condición necesaria de convergencia de una serie. Divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, denominada armónica Series de términos positivos Convergencia de la serie Comparación de series de términos positivos Series de términos positivos equivalentes. Los criterios de convergencia del cociente y la raíz. Series alternadas. Series absolutamente convergentes. Convergencia condicional. Relación entre series e integrales impropias. Suma de la serie alternada de la armónica.

Series de potencias.

Series funcionales. Series de Taylor. Dominio de convergencia de una serie de potencias. Derivación término a término de una serie de potencias Desarrollo en serie de la función arco tangente. Cálculo de integrales por desarrollo en serie. Unicidad del desarrollo de una función en serie de potencias. Función generatriz de una sucesión Producto de series de potencias. Desarrollo en serie de un cociente de funciones. Construcción de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales mediante desarrollos en serie. La fórmula del binomio de Newton.