# Fracciones continuas

Bernardo de la Calle Ysern

24 de diciembre de 2020

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Madrid

Orthonet

...but the question of what is the driving mechanism for, and how it explains the mystery of, orthogonal polynomials remained open. It was clear to me that most likely this mechanism is continued fractions.

S. Khrushchev*

*Orthogonal Polynomials and Continued Fractions, Cambridge University Press, Cambridge 2008.

# Esquema de la lección

1. Ejemplos históricos

2. Propiedades

3. Aproximación rápida. Consecuencias

4. Conclusión

# Ejemplos históricos

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$x_0 \quad = \quad b_0\, x_1 + x_2,$$

## Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0\, x_1 + x_2, \\ x_1 &= b_1\, x_2 + x_3, \end{aligned}$$

## Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0\, x_1 + x_2, \\ x_1 &= b_1\, x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ {\color{red} x_{n-1}} &= b_{n-1}\, {\color{red} x_n} + x_{n+1}, \end{aligned}$$

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0\, x_1 + x_2, \\ x_1 &= b_1\, x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= b_{n-1}\, x_n + x_{n+1}, \\ x_n &= b_n\, x_{n+1}. \end{aligned}$$

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
x_0 &= b_0\, x_1 + x_2, \\
x_1 &= b_1\, x_2 + x_3, \\
&\vdots \\
x_{n-1} &= b_{n-1}\, x_n + x_{n+1}, \\
x_n &= b_n\, x_{n+1}.
\end{aligned}
$$

- El último divisor $x_{n+1}$ es el m.c.d. de $x_0$ y $x_1$.

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{x_2}{x_1} = b_0 + \frac{1}{x_1/x_2},$$

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{x_1} &= b_0 + \frac{x_2}{x_1} = b_0 + \frac{1}{x_1/x_2}, \\ \frac{x_1}{x_2} &= b_1 + \frac{x_3}{x_2} = b_1 + \frac{1}{x_2/x_3}, \end{aligned}$$

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{x_0}{x_1} &= b_0 + \frac{x_2}{x_1} = b_0 + \frac{1}{x_1/x_2}, \\
\frac{x_1}{x_2} &= b_1 + \frac{x_3}{x_2} = b_1 + \frac{1}{x_2/x_3}, \\
&\vdots \\
\frac{x_{n-1}}{x_n} &= b_{n-1} + \frac{x_{n+1}}{x_n} = b_{n-1} + \frac{1}{x_n/x_{n+1}},
\end{aligned}
$$

# Algoritmo euclídeo de división

- Sean dos números naturales $x_0$ y $x_1$ con $x_0 > x_1$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{x_0}{x_1} &= b_0 + \frac{x_2}{x_1} = b_0 + \frac{1}{x_1/x_2}, \\
\frac{x_1}{x_2} &= b_1 + \frac{x_3}{x_2} = b_1 + \frac{1}{x_2/x_3}, \\
&\vdots \\
\frac{x_{n-1}}{x_n} &= b_{n-1} + \frac{x_{n+1}}{x_n} = b_{n-1} + \frac{1}{x_n/x_{n+1}}, \\
\frac{x_n}{x_{n+1}} &= b_n.
\end{aligned}
$$

# Algoritmo euclídeo de división

- Entonces

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}$$

## Algoritmo euclídeo de división

- Entonces

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cdots \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}$$

- Por tanto todo número racional se puede expresar como una fracción continua finita.

# Algoritmo euclídeo de división

- El proceso se puede repetir con cualquier número real $x$ dando en general una fracción continua infinita:

$$x \sim b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$$

- *Notación*: $x \sim [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$

## Algoritmo euclídeo de división

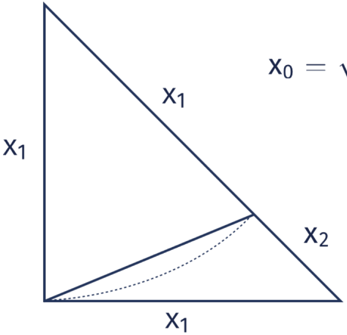
- El proceso se puede repetir con cualquier número real $x$ dando en general una fracción continua infinita:

$$x \sim b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots}}}$$

- *Notación*: $x \sim [b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]$

Es una representación universal e intrínseca de los números reales

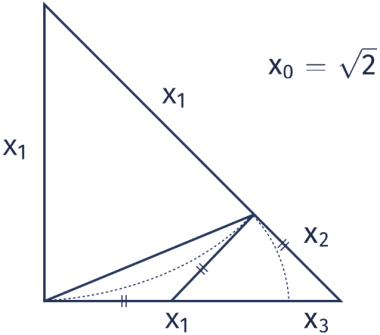
# Hipaso de Metaponto (450 a. C.)




$x_0 = \sqrt{2}$

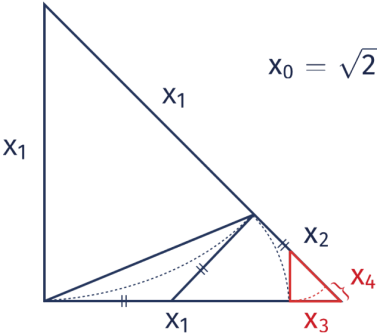
$$x_0 = x_1 + x_2$$

# Hipaso de Metaponto (450 a. C.)



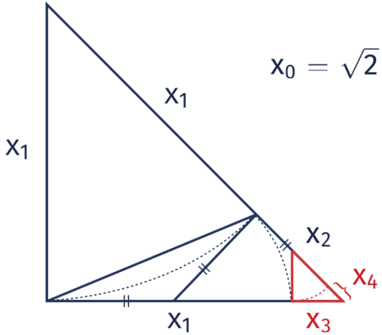

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_1 + x_2 \\
x_1 &= 2x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

# Hipaso de Metaponto (450 a. C.)




$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_1 + x_2 \\
x_1 &= 2x_2 + x_3 \\
x_2 &= 2x_3 + x_4
\end{aligned}
$$

# Hipaso de Metaponto (450 a. C.)

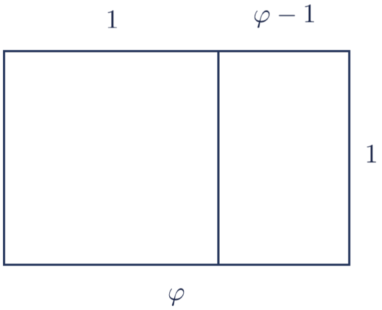



$$x_0 = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + x_2 \\ x_1 &= 2x_2 + x_3 \\ x_2 &= 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{2} \sim [1; 2, 2, \ldots, 2, \ldots]}$$

# Hipaso de Metaponto (450 a. C.)

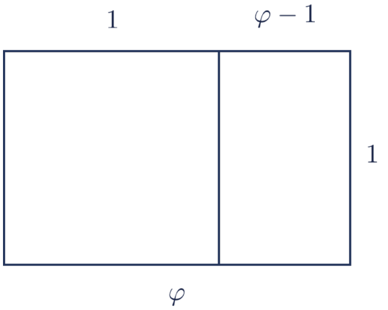



$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

# Hipaso de Metaponto (450 a. C.)




$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi - 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \sim [1; 1, 1, \ldots, 1, \ldots]}$$

# Calendario gregoriano (1582)

- Duración del año en el calendario de Julio César:

$$365 \text{ días } 6 \text{ h.} \quad \Longrightarrow \quad \text{años bisiestos}$$

- Duración precisa del año astronómico:

$$365 \text{ días } 5 \text{ h. } 48' \; 55''$$

- La diferencia es $0.0076968$ días por año

# Calendario gregoriano (1582)

- Duración del año en el calendario de Julio César:

$$365 \text{ días } 6 \text{ h.} \quad \Longrightarrow \quad \text{años bisiestos}$$

- Duración precisa del año astronómico:

$$365 \text{ días } 5 \text{ h. } 48' \; 55''$$

- La diferencia es $0.0076968$ días por año

$$= \cfrac{1}{129 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12 + \cdots}}} \Rightarrow \text{ un día cada 130 años.}$$

# La rueda dentada de Huygens (1682)

- Huygens diseñó un planetario con los movimientos de los planetas desde Mercurio hasta Saturno que se movía mediante un mecanismo de ruedas dentadas.

- Las ruedas dentadas ponían en relación los diferentes periodos de los planetas. El cociente de los de Saturno y la Tierra es (en segundos):

$$\frac{77708431}{2640858}$$

# La rueda dentada de Huygens (1682)

- Huygens diseñó un planetario con los movimientos de los planetas desde Mercurio hasta Saturno que se movía mediante un mecanismo de ruedas dentadas.
- Las ruedas dentadas ponían en relación los diferentes periodos de los planetas. El cociente de los de Saturno y la Tierra es (en segundos):

$$\frac{77708431}{2640858}$$

$$= 29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}} \approx \frac{206}{7},$$ con un error de $3.1 \times 10^{-3}$.

# Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

- Sea n un número natural que no sea cuadrado perfecto.

$$n = m^2 + a \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{m^2 + a} = m + x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a}{2m + x}$$

# Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

- Sea n un número natural que no sea cuadrado perfecto.

$$n = m^2 + a \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{m^2 + a} = m + x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a}{2m + x}$$

$$\boxed{\sqrt{n} \sim m + \cfrac{a}{2m + \cfrac{a}{2m + \cdots}}}$$

## Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

- Sea n un número natural que no sea cuadrado perfecto.

$$n = m^2 + a \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{m^2 + a} = m + x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a}{2m + x}$$

$$\boxed{\sqrt{n} \sim m + \cfrac{a}{2m + \cfrac{a}{2m + \cdots}}}$$

- Por ejemplo: $\sqrt{7} \sim 2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cdots}} \sim [2; 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4, \ldots]$

# Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

$$\boxed{\sqrt{7} = 2.6457\ldots}$$

$$2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4}}} \approx 2.6477; \qquad [2; 1, 1, 1] \approx 2.6667$$

# Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

$$\boxed{\sqrt{7} = 2.6457\ldots}$$

$$2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4}}} \approx 2.6477; \qquad [2; 1, 1, 1] \approx 2.6667$$

$$2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4}}}} \approx 2.6454; \qquad [2; 1, 1, 1, 4] \approx 2.6429$$

# Raíces cuadradas (Bombelli 1572)

$$\boxed{\sqrt{7} = 2.6457\ldots}$$

$$2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4}}} = \frac{233}{88} \approx 2.6477; \qquad [2; 1, 1, 1] = \frac{8}{3} \approx 2.6667$$

$$2 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{3}{4}}}} = \frac{1082}{409} \approx 2.6454; \qquad [2; 1, 1, 1, 4] = \frac{37}{14} \approx 2.6429$$

# Propiedades

# Definiciones

- Una fracción continua es una expresión del tipo

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cdots}}}$$

donde $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

- Se llama simple o regular si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$a_n = 1 \quad \text{y} \quad b_n \in \mathbb{N}.$$

## Definiciones

- Los convergentes $p_n/q_n$ son las fracciones
$$\frac{p_n}{q_n} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cdots \cfrac{a_{n-1}}{b_{n-1} + \cfrac{a_n}{b_n}}}}$$

- Si
$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = L$$

entonces se dice que la fracción continua es convergente y converge a L.

## Definiciones

- Una fracción continua es una expansión de $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = b_0 + \frac{a_1}{z_1}, \quad z_1 = b_1 + \frac{a_2}{z_2}, \quad \dots \quad z_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{z_{n+1}}, \dots$$

# Definiciones

- Una fracción continua es una expansión de $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = b_0 + \frac{a_1}{z_1}, \quad z_1 = b_1 + \frac{a_2}{z_2}, \quad \dots \quad z_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{z_{n+1}}, \dots$$

- !`Cuidado! Un número racional puede tener una expansión infinita:

$$2 = 1 + \frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \sim 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \dots}}$$

## Definiciones

- Una fracción continua es una expansión de $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = b_0 + \frac{a_1}{z_1}, \quad z_1 = b_1 + \frac{a_2}{z_2}, \quad \dots \quad z_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{z_{n+1}}, \dots$$

- !`Cuidado! Un número racional puede tener una expansión infinita:

$$2 = 1 + \frac{2}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \sim 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{2}{1 + \dots}}$$

?`La expansión converge a $2$?

# Definiciones

- Una fracción continua es una expansión de $z \in \mathbb{C}$ si

$$z = b_0 + \frac{a_1}{z_1}, \quad z_1 = b_1 + \frac{a_2}{z_2}, \quad \ldots \quad z_n = b_n + \frac{a_{n+1}}{z_{n+1}}, \ldots$$

- !`Cuidado! Un número racional puede tener una expansión infinita.

- !`Cuidado! Una expansión puede no ser convergente o converger a un número distinto del que se partió.

# Definiciones

$$\boxed{z + \frac{1}{z} = a}$$

$$z = a - 1/z = a - \frac{1}{a - 1/z} \sim a - \frac{1}{a - \frac{1}{a - \dots}}$$

# Definiciones

$$\boxed{z + \frac{1}{z} = a}$$

$$z = a - 1/z = a - \frac{1}{a - 1/z} \sim a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \dots}}$$

$$\frac{1}{z} = a - \frac{1}{1/z} = a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{1/z}} \sim a - \cfrac{1}{a - \cfrac{1}{a - \dots}}$$

# Relaciones de Euler-Wallis

- Se cumplen las relaciones de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
p_n &= b_n\, p_{n-1} + a_n\, p_{n-2}, & \qquad p_{-1} &= 1,\ p_0 = b_0, \\
q_n &= b_n\, q_{n-1} + a_n\, q_{n-2}, & \qquad q_{-1} &= 0,\ q_0 = 1.
\end{aligned}
$$

## Relaciones de Euler-Wallis

- Se cumplen las relaciones de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
p_n &= b_n\, p_{n-1} + a_n\, p_{n-2}, &\qquad p_{-1} &= 1,\ p_0 = b_0,\\
q_n &= b_n\, q_{n-1} + a_n\, q_{n-2}, &\qquad q_{-1} &= 0,\ q_0 = 1.
\end{aligned}
$$

- De aquí se deduce que

$$\boxed{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{q_n q_{n+1}}}$$

# Relaciones de Euler-Wallis

- De aquí se deduce que

$$\boxed{\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{q_n q_{n+1}}}$$

- Es decir, los convergentes $p_n/q_n$ de la fracción continua resultan ser las sumas parciales de la serie

$$b_0 + \frac{a_1}{q_1} - \frac{a_1\, a_2}{q_1\, q_2} + \frac{a_1\, a_2\, a_3}{q_2\, q_3} - \frac{a_1\, a_2\, a_3\, a_4}{q_3\, q_4} + \cdots$$

# Relaciones de Euler-Wallis

- Los convergentes de la expansión de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en fracción continua **simple** son fracciones irreducibles y cumplen

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n \, q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

# Relaciones de Euler-Wallis

- Los convergentes de la expansión de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en fracción continua **simple** son fracciones irreducibles y cumplen

$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n\, q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Las fracciones continuas simples son convergentes

# Relaciones de Euler-Wallis

- Los convergentes de la expansión de $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en fracción continua **simple** son fracciones irreducibles y cumplen
$$\frac{1}{2q_{n+1}^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n\, q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

- Además son óptimos en el sentido de que si $p/q \in \mathbb{Q}$ con $q \leq q_n$, entonces
$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|.$$

**Legendre-Pringsheim**

Supongamos que $a_n$ y $b_n$ son números enteros tales que

$$|a_n| + 1 \leq b_n.$$

Entonces

i) La fracción continua es convergente.
ii) El límite L es un número irracional (si la desigualdad es estricta infinitas veces).
iii) $|L| \leq 1$ (si $b_0 = 0$).

# Relaciones de Euler-Wallis

- Brouncker, un siglo antes de Euler, descubrió la fórmula

$$\boxed{\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}}$$

que puede deducirse de

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

**Problema**

Dado $M \in \mathbb{N}$ (no cuadrado perfecto) encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 = M\,y^2 + 1.$$

# La ecuación de Pell

**Problema**

Dado $M \in \mathbb{N}$ (no cuadrado perfecto) encontrar todas las soluciones enteras de la ecuación

$$x^2 = M\,y^2 + 1.$$

**Lagrange (1768)**

Existen infinitas soluciones $(x, y)$ y todos los cocientes $x/y$ son convergentes impares de la fracción continua simple de $\sqrt{M}$.

- Además todas las soluciones se escriben de la forma

$$x_n + y_n\sqrt{M} = \left(x_1 + y_1\sqrt{M}\right)^n,$$

donde $(x_1, y_1)$ es la solución mínima.

**Ejemplo:** $x^2 = 7y^2 + 1$.
Los convergentes de $\sqrt{7}$ son: $2; 3, 5/2, 8/3, \ldots$ y

$$\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^2 = 127 + 48\sqrt{7}, \quad \left(8 + 3\sqrt{7}\right)^3 = 2024 + 765\sqrt{7}.$$

Tras dedicarle tus desvelos, si participas de la sabiduría, haz la cuenta extranjero, de la cantidad de bueyes del Sol que pacían en las llanuras de la siciliana isla...

Arquímedes de Siracusa**

**Carta a Eratóstenes de Alejandría

> Tras dedicarle tus desvelos, si participas de la sabiduría, haz la cuenta extranjero, de la cantidad de bueyes del Sol que pacían en las llanuras de la siciliana isla...

Arquímedes de Siracusa**

- La primera parte del problema es equivalente a un sistema lineal de 7 ecuaciones con 8 incógnitas:

$$x_1 = 10366482\,n, \qquad x_3 = 7358060\,n,$$
$$x_2 = 7460514\,n, \qquad x_4 = 4149387\,n.$$

**Carta a Eratóstenes de Alejandría

> Y tú, extranjero, si llegaras a decir exactamente cuántas eran las reses del Sol, no serías llamado ignorante ni inexperto en números. Pero tampoco, desde luego, te contarían entre los sabios...
>
> Arquímedes de Siracusa**

**Carta a Eratóstenes de Alejandría

> Y tú, extranjero, si llegaras a decir exactamente cuántas eran las reses del Sol, no serías llamado ignorante ni inexperto en números. Pero tampoco, desde luego, te contarían entre los sabios...
>
> Arquímedes de Siracusa[**]

- La segunda parte supone resolver la ecuación de Pell con $\mathsf{M} = 410286423278424$.

[**] Carta a Eratóstenes de Alejandría

# El rebaño del Sol

**Amthor (1880)**

La solución mínima del problema del rebaño tiene 206545 dígitos, de los cuales los 4 primeros son 7766.

# El rebaño del Sol

**Amthor (1880)**

La solución mínima del problema del rebaño tiene 206545 dígitos, de los cuales los 4 primeros son 7760.

- Simplificó el problema considerando

$$\mathsf{x}^2 = \mathsf{M}\,\mathsf{y}^2 + 1 = 4729494\,(2 \cdot 4657\,\mathsf{y})^2 + 1 = \mathsf{N}\,\mathsf{z}^2 + 1$$

# El rebaño del Sol

**Amthor (1880)**

La solución mínima del problema del rebaño tiene 206545 dígitos, de los cuales los 4 primeros son 7760.

- Simplificó el problema considerando

$$x^2 = M\,y^2 + 1 = 4729494\,(2 \cdot 4657\,y)^2 + 1 = N\,z^2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} u = {} & 109931986732829734979866232821433543901088049 \\ & +50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{N} \end{aligned}$$

**Amthor (1880)**

La solución mínima del problema del rebaño tiene 206545 dígitos, de los cuales los 4 primeros son 7760.

- Simplificó el problema considerando

$$\mathsf{x}^2 = \mathsf{M}\,\mathsf{y}^2 + 1 = 4729494\,(2 \cdot 4657\,\mathsf{y})^2 + 1 = \mathsf{N}\,\mathsf{z}^2 + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{u} = 109931986732829734979866232821433543901088049$$
$$+50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{\mathsf{N}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathsf{x} + \mathsf{y}\sqrt{\mathsf{M}} = \mathsf{u}^{2329}$$

# Números irracionales

- Euler probó en 1737 la irracionalidad de e mediante su expansión en fracción continua simple:

$$\mathrm{e} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots] \qquad \text{¿Cómo calcularla?}$$

# Números irracionales

- Euler probó en 1737 la irracionalidad de e mediante su expansión en fracción continua simple:

$$\mathrm{e} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$$ ¿Cómo calcularla?

- Aunque en general la expansión puede no tener una forma regular... como la del número $\pi$:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$$

# Números irracionales

- Euler probó en 1737 la irracionalidad de e mediante su expansión en fracción continua simple:

$$\mathrm{e} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$$

¿Cómo calcularla?

- Aunque en general la expansión puede no tener una forma regular... como la del número $\pi$:

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$$

- El número $292$ acelera la convergencia:

$$\frac{\mathrm{p}_4}{\mathrm{q}_4} - \pi = \frac{355}{113} - \pi < \frac{\mathrm{p}_4}{\mathrm{q}_4} - \frac{\mathrm{p}_5}{\mathrm{q}_5} = 2.673 \times 10^{-7}$$

# Números irracionales

- En el año 1768 Lambert consiguió calcular una expansión de $\tan \mathsf{x}$ en fracción continua de la siguiente manera:

$$\tan \mathsf{x} = \frac{\sin \mathsf{x}}{\cos \mathsf{x}} = \frac{\mathsf{x} - \frac{\mathsf{x}^3}{6} + \frac{\mathsf{x}^5}{120} - \cdots}{1 - \frac{\mathsf{x}^2}{2} + \frac{\mathsf{x}^4}{24} - \cdots} = \frac{\mathsf{x}}{\frac{1 - \frac{\mathsf{x}^2}{2} + \frac{\mathsf{x}^4}{24} - \cdots}{1 - \frac{\mathsf{x}^2}{6} + \frac{\mathsf{x}^4}{120} - \cdots}}$$

# Números irracionales

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots} = \frac{x}{\dfrac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots}}$$

$$= \frac{x}{1 - \dfrac{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \cdots}} = \frac{x}{1 - \dfrac{x^2}{\dfrac{1 - \frac{x^2}{6} + \cdots}{\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} + \cdots}}}$$

## Números irracionales

- Repitiendo la operación indefinidamente, se llega a

$$\boxed{\tan x \sim \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cdots}}}}}$$

# Números irracionales

**Lambert (1768)**

Si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $\tan x$ es irracional.

**Demostración:**

$$\tan\frac{p}{q} \sim \cfrac{p/q}{1-\cfrac{p^2/q^2}{3-\cfrac{p^2/q^2}{5-\cfrac{p^2/q^2}{7-\cdots}}}} \sim \cfrac{p}{q-\cfrac{p^2}{3q-\cfrac{p^2}{5q-\cfrac{p^2}{7q-\cdots}}}}$$

**Lambert (1768)**

Si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $\tan x$ es irracional.

$$\boxed{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\pi \text{ es irracional}}$$

# Números irracionales

**Lambert (1768)**

Si $x \neq 0$ es un número racional, entonces $\tan x$ es irracional.

La función $\tanh x$ verifica la misma propiedad y como

$$\exp x = \frac{1 + \tanh(x/2)}{1 - \tanh(x/2)},$$

también se cumple que

$$\boxed{\exp x \text{ es irracional si } x \neq 0 \text{ es racional}}$$

# Aproximación rápida. Consecuencias

# Aproximación rápida

**Teorema**

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}, \quad q_n x - p_n \neq 0.$

ii) $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \to \infty.$

Entonces $x$ es un número irracional.

# Aproximación rápida

**Teorema**

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}, \quad q_n x - p_n \neq 0.$

ii) $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \to \infty.$

Entonces $x$ es un número irracional.

**Aproximación rápida por racionales implica irracionalidad**

# Aproximación rápida

**Teorema**

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad q_n x - p_n \neq 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - \frac{p_n}{q_n} = o\left(\frac{1}{q_n}\right), \quad n \to \infty.$

Entonces $x$ es un número irracional.

- El número e es irracional:

$$0 \leq e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \leq \frac{e^{\theta}}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!} = \frac{3}{N+1}\,\frac{1}{N!}.$$

# Aproximación rápida

**Teorema**

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}, \quad q_n x - p_n \neq 0.$

ii) $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0 \iff x - \dfrac{p_n}{q_n} = o\left(\dfrac{1}{q_n}\right), \quad n \to \infty.$

Entonces $x$ es un número irracional.

• El polinomio de Taylor no proporciona en general aproximaciones rápidas:

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3\,2^3} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{5\,2^5} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{1}{7\,2^7} + \cdots$$

# Aproximación rápida

**Teorema**

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\{p_n/q_n\} \subset \mathbb{Q}$ una sucesión tal que:

i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\quad q_n x - p_n \neq 0.$

ii) $\lim_{n\to\infty} q_n x - p_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - \dfrac{p_n}{q_n} = o\left(\dfrac{1}{q_n}\right), \quad n \to \infty.$

Entonces x es un número irracional.

?`Cómo conseguir buenos aproximantes racionales?

# Aproximación rápida

**Apéry (1978)**

El número $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ es irracional.

- Usa la fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \left[ \binom{2n}{n} \right]^{-1}.$$

La demostración no es generalizable al caso de otros valores del exponente.

$$\vdots$$

# Números algebraicos y trascendentes

- Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número algebraico si $\alpha$ es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

## Números algebraicos y trascendentes

- Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número algebraico si $\alpha$ es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

- El polinomio mínimo de $\alpha$ es el polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de menor grado que tiene a $\alpha$ como raíz. Se caracteriza por ser irreducible en $\mathbb{Q}$.

## Números algebraicos y trascendentes

- Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número algebraico si $\alpha$ es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

- El polinomio mínimo de $\alpha$ es el polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de menor grado que tiene a $\alpha$ como raíz. Se caracteriza por ser irreducible en $\mathbb{Q}$.

- El grado de un número algebraico es el grado de su polinomio mínimo.

## Números algebraicos y trascendentes

- Se dice que $\alpha \in \mathbb{C}$ es un número algebraico si $\alpha$ es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$.

- El polinomio mínimo de $\alpha$ es el polinomio mónico con coeficientes en $\mathbb{Q}$ de menor grado que tiene a $\alpha$ como raíz. Se caracteriza por ser irreducible en $\mathbb{Q}$.

- El grado de un número algebraico es el grado de su polinomio mínimo.

- El conjunto de los números algebraicos, que denotaremos por $\mathbb{A}$, tiene estructura de cuerpo.

# Números algebraicos y trascendentes

- Los elementos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$ se llaman números trascendentes.
  - ?`Existen números trascendentes?
  - ?`Cuántos hay?
  - ?`Cómo se prueba que un número es trascendente?
  - ?`Son e o $\pi$ trascendentes?

# Los trascendentes de Liouville

**Liouville (1844)**

Sea $\alpha$ un número algebraico de grado m $\geq 2$ (no racional).
Entonces existe $c_\alpha \in (0,1)$ tal que para **toda** fracción p/q:

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

# Los trascendentes de Liouville

**Liouville (1844)**

Sea $\alpha$ un número algebraico de grado m $\geq 2$ (no racional).
Entonces existe $c_\alpha \in (0,1)$ tal que para toda fracción p/q:

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Aproximación muy rápida por racionales implica trascendencia

# Los trascendentes de Liouville

**Liouville (1844)**

Sea $\alpha$ un número algebraico de grado $m \geq 2$ (no racional). Entonces existe $c_\alpha \in (0,1)$ tal que para toda fracción $p/q$:

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

- Primeros ejemplos de trascendentes: $x = \sum_{n=1}^{\infty} 1/10^{n!}$.

$$x - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{10^{n!}} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}} < \sum_{n=(N+1)!}^{\infty} \frac{1}{10^{n}} < \frac{2}{10^{(N+1)!}} = \frac{2}{q^{N+1}}.$$

**Liouville (1844)**

Sea $\alpha$ un número algebraico de grado $m \geq 2$ (no racional). Entonces existe $c_\alpha \in (0,1)$ tal que para toda fracción $p/q$:

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

- ?`Cuál es el menor exponente que se puede elegir en $c_\alpha / q^m$ de modo que el teorema de Liouville siga siendo cierto?

# Los trascendentes de Liouville

**Liouville (1844)**

Sea $\alpha$ un número algebraico de grado m $\geq 2$ (no racional).
Entonces existe $c_\alpha \in (0,1)$ tal que para toda fracción p/q:

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

- ?`Cuál es el menor exponente que se puede elegir en $c_\alpha/q^m$ de modo que el teorema de Liouville siga siendo cierto?
  - **Thue (1909)**: $m/2+1+\varepsilon$, con $\varepsilon$ arbitrario.
  - **Siegel (1921)**: $2\sqrt{m}$.

# Los trascendentes de Liouville

**Liouville (1844)**

Sea $\alpha$ un número algebraico de grado $m \geq 2$ (no racional). Entonces existe $c_\alpha \in (0,1)$ tal que para toda fracción $p/q$:

$$\frac{c_\alpha}{q^m} \leq \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|.$$

• ?`Cuál es el menor exponente que se puede elegir en $c_\alpha/q^m$ de modo que el teorema de Liouville siga siendo cierto?

- **Thue (1909)**: $m/2 + 1 + \varepsilon$, con $\varepsilon$ arbitrario.
- **Siegel (1921)**: $2\sqrt{m}$.
- **Roth (1955)**: !`$2 + \varepsilon$! , con $\varepsilon$ arbitrario. (¡Medalla Fields!)

## Los trascendentes de Liouville

Aproximación por racionales algo más rápida de lo normal implica trascendencia

Aproximación por racionales algo más rápida de lo normal implica trascendencia

**Khinchin (1926)**

El conjunto de números trascendentes que se pueden aproximar por racionales a velocidad $2+\varepsilon$ tiene medida nula.

$\vdots$

## Cantor (1874)

- El conjunto $\mathbb{A}$ de números algebraicos tiene cardinal numerable.

## Cantor (1874)

- El conjunto $\mathbb{A}$ de números algebraicos tiene cardinal numerable.
- Dada una sucesión cualquiera de números reales es posible construir un número real que no pertenece a la sucesión. En particular existen infinitos números trascendentes.

## Cantor (1874)

- El conjunto $\mathbb{A}$ de números algebraicos tiene cardinal numerable.
- Dada una sucesión cualquiera de números reales es posible construir un número real que no pertenece a la sucesión. En particular existen infinitos números trascendentes.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales tiene cardinal no numerable.

# Cantor (1874)

- El conjunto $\mathbb{A}$ de números algebraicos tiene cardinal numerable.
- Dada una sucesión cualquiera de números reales es posible construir un número real que no pertenece a la sucesión. En particular existen infinitos números trascendentes.
- El conjunto $\mathbb{R}$ de números reales tiene cardinal no numerable.

**Casi todos los números reales son trascendentes**

# Conclusión

# Algunas ideas importantes para recordar

- Relación de recurrencia a tres términos.
- Aproximación óptima y constructiva.
- En ocasiones representación no equivale a convergencia.
- Una representación adecuada permite probar resultados inversos.
- Veremos otra manera de probar que un número es trascendente relacionada con los aproximantes de Padé.

## Para saber más


- **Hairer y Wanner**, Analysis by Its History, Springer-Verlag, New York 1996.
- **Khinchin**, Continued Fractions, Dover, Mineola, NY 1997.
- **Khrushchev**, Orthogonal Polynomials and Continued Fractions, Cambridge University Press, Cambridge 2008.
- **Nikishin y Sorokin**, Rational Approximation and Orthogonality, AMS, Providence, RI 1991.

¿Preguntas?

# Irracionales cuadráticos

- Un número real x se llama irracional cuadrático si es raíz de un polinomio de grado $2$ con coeficientes enteros y no es un número racional.

# Irracionales cuadráticos

- Un número real x se llama irracional cuadrático si es raíz de un polinomio de grado $2$ con coeficientes enteros y no es un número racional.

- El hecho de que la ecuación de Pell siempre tiene soluciones no triviales está relacinado con:

**Euler-Lagrange**

La fracción continua regular de x $\in \mathbb{R}$ es periódica si y solo si x es un irracional cuadrático.

# Irracionales cuadráticos

**Euler-Lagrange**

La fracción continua regular de $x \in \mathbb{R}$ es periódica si y solo si $x$ es un irracional cuadrático.

- Euler ideó un algoritmo en enteros para computar el desarrollo.

## Irracionales cuadráticos

**Euler-Lagrange**

La fracción continua regular de x $\in \mathbb{R}$ es periódica si y solo si x es un irracional cuadrático.

- Euler ideó un algoritmo en enteros para computar el desarrollo.

- Los coeficientes del periodo son simétricos respecto al centro del periodo si se exceptúa el último de ellos:

$$\sqrt{29} = [5; 2, 1, 1, 2, 10, \ldots],$$
$$\sqrt{31} = [5; 1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10, \ldots].$$

# La constante de Khinchin

**Khinchin (1935)**

Para casi todo número real $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right]^{\log n/\log 2} \approx 2,68545\ldots$$

- Una notable excepción al teorema es el número e cuyas medias geométricas $\sqrt[3n]{2^n n!}$ tienden a $+\infty$.