Teoremas de inyectividad global

Bernardo de la Calle Ysern
Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial
ETS de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid

Introducción

El propósito de estas notas es reunir una serie de teoremas que tienen como característica común el deducir que una determinada función es globalmente inyectiva suponiendo que la función es inyectiva localmente. La función involucrada satisface alguna condición de regularidad, tal como ser continua o de clase C^1. Atendiendo a las condiciones que hay que añadir para obtener el resultado, podemos clasificar los teoremas en tres grandes grupos:

1. Se imponen condiciones sobre el comportamiento de la función «en el infinito» (es decir, fuera de regiones compactas).
2. El conjunto tiene frontera y la función es inyectiva en la frontera.
3. La función es de clase C^1 en un dominio y su matriz jacobiana, que es no singular, satisface alguna condición algebraica o de crecimiento.

Sin ánimo de ser exhaustivos, daremos al menos un ejemplo de cada grupo de teoremas, aunque en algún caso el resultado puede adscribirse a dos grupos distintos.

1. Aplicaciones propias

Recordemos que una función $g : X \to Y$ entre dos espacios topológicos X e Y se dice que es *propia* si, para todo conjunto compacto $K \subset Y$, la preimagen $g^{-1}(K)$ es un conjunto compacto de X.

Dado que el resultado principal de esta sección tiene que ver con aplicaciones propias y que la cualidad de ser propia no es en ocasiones fácil de comprobar directamente, ahondaremos algo más sobre este concepto, véase [12, Chapter 4] . En términos intuitivos, podemos decir que una función g es propia si «lleva el infinito al infinito», entendiendo por infinito todo aquello situado fuera de regiones compactas. Una manera de hacer precisa esta idea es la siguiente. Dado un espacio topológico X, diremos que una sucesión $\{x_n\}$ *diverge a infinito* si en cualquier compacto K de X solo hay un número finito de elementos de la sucesión $\{x_n\}$. Puede demostrarse que en cualquier espacio topológico "razonable"

30 de noviembre de 2021

una sucesión diverge a infinito si y solo si no tiene subsucesiones convergentes. Entonces puede probarse que una aplicación entre espacios topológicos X e Y —donde X es Hausdorff y verifica el segundo axioma de numerabilidad— es propia si y solo si transforma sucesiones que divergen a infinito en X en sucesiones que divergen a infinito en Y.

Existe una estrecha relación entre aplicaciones propias y cerradas, lo cual puede ayudar aún más a entender el concepto de aplicación propia. Supongamos que el espacio topológico final Y es Hausdorff y localmente compacto. Entonces toda aplicación continua y propia de X a Y es cerrada. Recíprocamente, toda aplicación continua y cerrada g verificando que $g^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$ es propia.

Para el enunciado del Teorema 1 necesitamos además definir lo que es una variedad. Recordemos que una variedad topológica de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff, que verifica el segundo axioma de numerabilidad y que es localmente homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}^n$, véase [12, p. 38]. En particular y a menos que se diga lo contrario, las variedades que aparecen en estas notas no tienen frontera —es decir, cuando se consideran en sí mismas; si son variedades contenidas en otras, entonces pueden aparecer puntos frontera de la menor en la mayor, como ocurriría con un abierto de $\mathbb{R}^n$—.

Tenemos entonces el resultado que aparece a continuación, debido básicamente a Hadamard, cf. [9, Theorem 6.2.8].

Teorema 1. *Sean $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ dos variedades topológicas conexas y sea una aplicación continua $f : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$. Supongamos que*

i) f es propia.

ii) f es localmente inyectiva.

iii) $\mathfrak{M}_2$ es simplemente conexa.

Entonces f es un homeomorfismo entre $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$.

En primer lugar, observemos que si f es un homeomorfismo, entonces se cumplen las condiciones i) y ii), pues en ese caso f^{-1} es una función continua que transforma conjuntos compactos en conjuntos compactos. Por consiguiente, las condiciones i) y ii) son necesarias.

Algunos comentarios adicionales pueden ayudar a la comprensión del resultado. En el caso de que $\mathfrak{M}_1$ sea una variedad compacta la condición i) se cumple trivialmente; pues si K es un compacto del espacio final entonces K es un conjunto cerrado —las variedades topológicas son espacios Hausdorff—, por tanto, debido a la continuidad de f, la preimagen $f^{-1}(K)$ es un cerrado contenido en el compacto $\mathfrak{M}_1$ y, por consiguiente es también un conjunto compacto.

Por otro lado, es fácil ver que hay que exigir que las variedades $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ sean conexas. En efecto, sea $\mathfrak{M}$ una variedad conexa compacta simplemente conexa —por ejemplo, la esfera bidimensional—. Tomamos como $\mathfrak{M}_1$ la unión disjunta de dos copias de $\mathfrak{M}$, y sea $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$ con f la aplicación identidad sobre cada componente conexa de $\mathfrak{M}_1$. Entonces se cumplen todas las hipótesis, salvo que $\mathfrak{M}_1$ es conexa, y el teorema sin embargo no es cierto. Si ahora intercambiamos los papeles de $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ y consideramos la aplicación identidad sobre una de las dos copias de $\mathfrak{M}$ que constituyen $\mathfrak{M}_2$, vemos que la variedad final también tiene que ser conexa si queremos que el teorema se cumpla.

Para ver que $\mathfrak{M}_2$ tiene que ser simplemente conexa, tomamos $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{C}$, la esfera unidimensional. Es decir,

$$\mathfrak{C} = \left\{e^{it} \,:\, t \in [0, 2\pi]\right\}$$

y consideramos $f(e^{it}) = e^{2it}$. Nuevamente se cumplen todas las hipótesis, salvo que $\mathfrak{M}_2$ es simplemente conexa, y el teorema no es cierto.

En cuanto el resultado en sí, no es complicado ver que la aplicación f es necesariamente sobreyectiva. Consideremos el conjunto imagen $A = f(\mathfrak{M}_1) \subset \mathfrak{M}_2$. Por la condición ii), el conjunto A es abierto. Veamos que también es cerrado. En efecto, sea $\{y_n\}$ una sucesión convergente contenida en A y llamamos y_0 a su límite. Tenemos que probar que $y_0 \in A$. Escogemos un entorno compacto de y_0 y lo llamamos K —toda variedad es localmente compacta—. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{y_n\}$ está contenida en K. Entonces $f^{-1}(K)$ es compacto y la sucesión $\{x_n\}$, con $f(x_n) = y_n$, admite una subsucesión convergente a un punto $x_0 \in f^{-1}(K)$. Por continuidad de f, se tiene que $f(x_0) = y_0$ e $y_0 \in A$. Obsérvese que hemos utilizado la definición de conjunto secuencialmente compacto en $\mathfrak{M}_1$, en vez de la de compacto. Como $\mathfrak{M}_1$ es una variedad, entonces es un espacio metrizable —por el teorema de Urysohn, al ser la variedad topológica un espacio que satisface el segundo axioma de numerabilidad—, y en los espacios metrizables ambas definiciones son equivalentes. En definitiva, el conjunto no vacío A es a la vez abierto y cerrado en $\mathfrak{M}_2$. Como $\mathfrak{M}_2$ es un conjunto conexo, necesariamente se verifica que $A = \mathfrak{M}_2$.

La parte difícil consiste en probar que f es inyectiva, lo cual se deduce de la teoría de los espacios recubridores, en la cual no podemos entrar aquí, pero podemos apuntar que tiene estrechas conexiones con el primer grupo de homotopía (grupo fundamental) de un espacio topológico. Por ser f propia, sobreyectiva y homeomorfismo local —véase el teorema de la invariancia del dominio en la siguiente sección—, entonces f es una aplicación recubridora entre variedades y la aplicación inducida entre los grupos de homotopía

$$f_* : \pi_1(\mathfrak{M}_1) \to \pi_1(\mathfrak{M}_2)$$

es un monomorfismo. Por comodidad en la notación, hemos eliminado la dependencia del punto base en el grupo de homotopía. Como en este caso se tiene $\pi_1(\mathfrak{M}_2) = \{0\}$, necesariamente f_* es un isomorfismo y la teoría mencionada permite ahora deducir que f es un homeomorfismo, debido a la rigidez que caracteriza a estas estructuras, véase [12, Corollary 11.33]. Básicamente, las posibles aplicaciones recubridoras de $\mathfrak{M}_2$ se corresponden con clases de conjugación de los diferentes subgrupos de $\pi_1(\mathfrak{M}_2)$.

En el caso en que las variedades $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ sean abiertos de $\mathbb{R}^n$, podemos dar una descripción más concreta del concepto de función propia particularizando lo que se mencionó al principio de la sección. Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^n$ y consideramos una aplicación cualquiera $f : U \to V$. Entonces f es propia si y solo si para toda sucesión $\{x_n\}$ de U que converge a un punto de la frontera de U, entonces la sucesión imagen $\{f(x_n)\}$ converge a un punto de la frontera de V, entendiendo la frontera y la convergencia en un sentido amplio que incluya al infinito. Como ejemplo de esto último, podemos formular el siguiente corolario al Teorema 1.

Corolario 1. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1. Entonces F es un difeomorfismo si y solo si $F'(\boldsymbol{x})$ es no singular para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y*

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to +\infty} \|F(\boldsymbol{x})\| = +\infty.$$

Finalmente, hagamos notar que el Teorema 1 puede generalizarse a aplicaciones entre espacios de Banach, debido, entre otras cosas, a que la estructura lineal asegura la conexión y la conectividad simple de los espacios. Véase [2, Theorem 5.1.4].

Teorema 2. *Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo local entre espacios de Banach. Entonces f es un homeomorfismo si y solo si f es propia.*

En particular, el Teorema 2 es cierto si f es de clase C^1 y $f'(x)$ es invertible para todo $x \in X$.

2. Inyectividad en la frontera

Veamos a continuación resultados pertenecientes al segundo grupo de teoremas mencionado al comienzo. Para ello, es conveniente precisar primero algunas ideas relacionadas con la frontera de un conjunto, así como con la diferencia entre función localmente inyectiva y homeomorfismo local. El resultado más importante al respecto, debido a Brouwer, es el siguiente, cf. [13, Section VIII.6].

Teorema de la invariancia del dominio. *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente inyectiva en el abierto U. Entonces F es una aplicación abierta, es decir, transforma abiertos de U —abiertos de $\mathbb{R}^n$ contenidos en U— en abiertos de $\mathbb{R}^n$.*

Podríamos haber enunciado el teorema igualmente considerando una aplicación

$$f : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2,$$

con $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ variedades topológicas de la misma dimensión, véase [11, Exercise 2.1.7].

El resultado es característico de abiertos de $\mathbb{R}^n$ —o de conjuntos modelados sobre abiertos de R^n como las variedades topológicas sin frontera— y requiere para su demostración de alguna de las técnicas profundas de topología, tales como el teorema de separación de Jordan en $\mathbb{R}^n$, la teoría de homología o la teoría del grado topológico. El teorema no es cierto en espacios de Banach o en subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$. De manera inmediata se obtienen las siguientes consecuencias.

Corolario 2. *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva en el abierto U. Entonces F es un homeomorfismo de U en $F(U)$.*

De aquí se deduce que en una variedad topológica –o en un abierto de $\mathbb{R}^n$— una función es localmente inyectiva si y solo si es homeomorfismo local.

Corolario 3. *Sea A y B dos subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : A \to B$ homeomorfismo. Entonces puntos interiores y frontera de A se corresponden, respectivamente, con los puntos interiores y frontera de B.*

Observación. Hay que tener presente que si dos subconjuntos arbitrarios A y B de $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos y uno de ellos es abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces el otro también es abierto, precisamente debido al teorema de la invariancia del dominio. Por el contrario, si uno de ellos es cerrado, entonces el otro no tiene por qué serlo, como muestra el ejemplo de la función $f(x) = 1/x$ que transforma el intervalo $[1, +\infty)$ en el intervalo $(0, 1]$. Obsérvese que un homeomorfismo es, por definición, una aplicación tanto cerrada como abierta, pero los cerrados de un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$ —con la topología heredada— no son, en general, cerrados de $\mathbb{R}^n$.

Observación. Aunque hemos dicho que el teorema de la invariancia del dominio no es cierto en espacios de Banach, naturalmente puede deducirse que una aplicación es abierta vía el teorema de la función inversa. Es decir, sea $f : \Omega \subset X \to Y$ una función de clase C^1 en el abierto Ω con X e Y espacios de Banach. Supongamos que $f'(x)$ es invertible para todo $x \in X$, entonces f es una aplicación abierta. A este respecto, quizás no está de más recordar que el famoso teorema de la aplicación abierta afirma que toda aplicación *lineal* continua y sobreyectiva entre espacios de Banach es una aplicación abierta.

Observación. Cabe señalar lo siguiente respecto del teorema de la aplicación inversa. Sea la función $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si $F'(\boldsymbol{a})$ es invertible, con $\boldsymbol{a} \in U$, pero F no es de clase C^1 en U, entonces la condición de invertibilidad de la matriz F' no se propaga a puntos cercanos y no podemos asegurar la existencia de aplicación inversa local en un entorno del punto $\boldsymbol{a}$. No obstante, se puede probar que si F es diferenciable (no necesariamente de clase C^1) sin puntos críticos en todo U, entonces F es un homeomorfismo local en U y existe inversa diferenciable en aquellas regiones donde exista inversa topológica. En particular, F es un difeomorfismo local, cf. [6, Theorem 4.3].

Estamos ahora en disposición de enunciar algún resultado donde se obtiene inyectividad global a partir de inyectividad local e inyectividad en la frontera. Véanse [14] y [17]. Estos resultados aparecen en mecánica y elasticidad en relación con la impenetrabilidad de la materia, es decir, se trata de teoremas en los que se descarta la penetrabilidad de la materia en el interior de un cuerpo teniendo información sobre la deformación que se produce en la frontera del cuerpo.

Teorema 3. *Sean $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$ variedades topológicas de dimensión $n \geq 2$ y f una función continua definida en el compacto $K \subset \mathfrak{M}_1$ con valores en $\mathfrak{M}_2$. Supongamos que*

i) $\mathfrak{M}_2 \setminus f(K) \neq \emptyset$.

ii) *f es localmente inyectiva en K.*

iii) *∂K es conexo y f es inyectiva en ∂K.*

Entonces f es inyectiva en K.

El teorema sigue siendo cierto aunque la condición ii) deje de cumplirse en una cantidad finita de puntos en el interior de K. Una situación común en la que se puede aplicar el resultado anterior sería la siguiente. Sea $F : K \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en un entorno abierto U del compacto K que no tenga puntos críticos en U. Entonces, si F es inyectiva en el conjunto conexo ∂K, lo es también en K.

En el caso particular anterior podemos permitir que la frontera de K tenga varias componentes conexas —siempre que ahora K sea conexo— debido al resultado siguiente que complementa el Teorema 3.

Teorema 4. *Sean $\mathfrak{M}_1$ variedad topológica compacta, conexa y con frontera y $\mathfrak{M}_2$ variedad sin frontera simplemente conexa. Sea $f : \mathfrak{M}_1 \to \mathfrak{M}_2$ una aplicación continua tal que*

i) f es homeomorfismo local en $\mathfrak{M}_1$.

ii) f es inyectiva en cada componente conexa de la frontera de $\mathfrak{M}_1$.

Entonces f es inyectiva en $\mathfrak{M}_1$.

Es interesante señalar que la demostración de este último resultado se limita a aplicar de manera adecuada el Teorema 1 a una extensión de f sobre una variedad sin frontera que contiene a $\mathfrak{M}_1$.

Véase también [4, Section 5.5], donde se enuncian versiones similares de los Teoremas 3 y 4 en el contexto de la elasticidad y de las deformaciones de cuerpos sólidos. En ese contexto es natural exigir que la transformación $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ preserve la orientación, es decir, $\det f'(\boldsymbol{x}) > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in U$. Un resultado curioso sin condiciones de frontera y que no es difícil de probar —véase [4, Theorem 5.6.1]—, afirma que si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una función de clase C^1 en un entorno de $\overline{\Omega}$, donde Ω es un dominio acotado, con $\det f'(\boldsymbol{x}) > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \Omega$, y verifica

$$\iiint_{\Omega} \det f'(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \leq \mathrm{Vol}(f(\Omega)),$$

entonces f es inyectiva en Ω. Es decir, si la transformación f preserva la orientación y la integral que calcula el volumen de la imagen —en el caso de ser f inyectiva— no excede el volumen de la imagen, entonces se puede afirmar que f es inyectiva.

3. Condiciones sobre la matriz jacobiana

El resultado más antiguo de este tipo se debe a Hadamard [8] y su demostración guarda muchos puntos de contacto con la del Teorema 1 en el sentido de que al final se prueba que la aplicación involucrada es una aplicación recubridora.

Teorema 5. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo local de clase C^1 tal que*

$$\int_0^{+\infty} \min_{\|\boldsymbol{x}\|=r} \|F'(\boldsymbol{x})^{-1}\|^{-1}\, dr = +\infty. \tag{1}$$

Entonces F es biyectiva.

En particular, si $\|F'(\boldsymbol{x})^{-1}\| \leq M$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces F es biyectiva. El teorema es cierto para aplicaciones entre espacios de Banach, véase [2, Theorem 5.1.5]. Obsérvese que, para el caso $n = 1$, la condición (1) se puede reescribir como

$$\int_{-\infty}^{a} F'(x)\, dx = +\infty, \quad \int_{a}^{+\infty} F'(x)\, dx = +\infty,$$

ya que podemos suponer que $F'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Obviamente, en este caso simple la función F es directamente inyectiva al ser monótona creciente, pero la divergencia de las integrales anteriores es lo que asegura la sobreyectividad de F al obligar a que la función F crezca suficientemente rápido. Otra manera de verlo es que obliga a que la función F sea propia «al mandar el infinito al infinito».

Ejemplo. Podemos efectuar los cálculos correspondientes para el conocido ejemplo

$$F(x, y) = e^x(\cos y, \operatorname{sen} y),$$

que es un difeomorfismo local de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$, pero claramente no es una aplicación biyectiva. La inversa de la matriz jacobiana F' es igual a

$$F'(x, y)^{-1} = e^{-x} \begin{bmatrix} \cos y & \operatorname{sen} y \\ -\operatorname{sen} y & \cos y \end{bmatrix}.$$

Por tanto, al ser la matriz que aparece en la expresión anterior una matriz ortogonal, tenemos $\|F'(\boldsymbol{x})^{-1}\| = e^{-x}$ y así se cumple

$$\|F'(\boldsymbol{x})^{-1}\|^{-1} = e^x.$$

Entonces,

$$\int_0^{+\infty} \inf_{\|\boldsymbol{x}\|=r} \|F'(\boldsymbol{x})^{-1}\|^{-1}\, dr = \int_0^{+\infty} \inf_{|x|=r} e^x\, dr = \int_0^{+\infty} e^{-r}\, dr = 1.$$

Por otro lado, no es difícil encontrar ejemplos que muestran que la condición (1) no es una condición necesaria. Uno de ellos es la función $S(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z)$. Véase, para los cálculos detallados, [15, Example 3.7].

Observación. Es fácil ver que

$$\|F'(\boldsymbol{x})^{-1}\|^{-1} = \min_{\|\boldsymbol{v}\|=1} \|F'(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}\|, \tag{2}$$

lo que puede facilitar la aplicación del Teorema 5. A este respecto, en [15, Theorem 1.5], se prueba un teorema análogo al Teorema 5 con la condición

$$\int_0^{+\infty} \min_{\|\boldsymbol{x}\|=r} \|F'(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}\|\, dr = +\infty \text{ para todo } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\},$$

que, a la vista de la igualdad (2), resulta ser una condición más debil que (1) y de cálculo más fácil. De hecho, puede utilizarse para comprobar que la función S definida anteriormente es un difeomorfismo global, lo que por otra parte es muy sencillo de comprobar directamente.

Esencialmente, la condiciones anteriores nos dicen que la norma de F' no puede hacerse muy pequeña en $\mathbb{R}^n$. El siguiente resultado [3, Theorem 1.1] abunda en la misma dirección, pero desde otro punto de vista. Recordemos que los valores singulares de una matriz real A son los autovalores de la matriz AA^t.

Teorema 6. *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1. Supongamos que todos los valores singulares de las matrices $F'(\boldsymbol{x})$ están uniformemente alejados de 0 cuando $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces F es injectiva en $\mathbb{R}^n$.*

Una conjetura relacionada con el Teorema 6 afirma que si todos los autovalores de las matrices $F'(\boldsymbol{x})$ están uniformemente alejados de 0 para $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces F es inyectiva en $\mathbb{R}^n$. Esta condición, así como la de los valores singulares, no es una condición necesaria, como muestra el caso de la función unidimensional $f(x) = \arctan x$.

Finalizamos con unos resultados importantes debidos a Gale y Nikaidô [5] en donde se imponen sobre la matriz jacobiana condiciones que tienen un carácter más algebraico. Veamos algunas definiciones previas. Una matriz real cuadrada A es una *P-matriz* si todos sus menores principales son positivos. Los menores principales son los determinantes de las submatrices que se obtienen de A al eliminar las mismas filas que columnas, tanto en número como en el lugar que ocupan. Una matriz cuadrada de dimensión n tiene exactamente el número combinatorio n sobre k menores principales de orden k.

La matriz A (no necesariamente simétrica) es *definida positiva* si $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ no nulo. Se corresponde exactamente con que la parte simétrica de A, es decir $(A + A^T)/2$, sea una matriz definida positiva. Se puede probar que todas las matrices definidas positivas son P-matrices.

Una *región rectangular* en $\mathbb{R}^n$ es una región cerrada del tipo

$$R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, a_i \le x_i \le b_i, \; i = 1, \ldots, n\} \, .$$

La región R puede ser degenerada teniendo entonces interior vacío. Ahora ya estamos en disposición de enunciar el siguiente resultado.

Teorema 7. *Sea $F : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 en un entorno de la región rectangular R. Supongamos que la matriz jacobiana $F'(\boldsymbol{x})$ es una P-matriz para todo $\boldsymbol{x} \in R$. Entonces F es inyectiva en R.*

Ejemplo. Podemos analizar el ejemplo anterior a la luz de este resultado. Como

$$\frac{F'(x,y) + F'(x,y)^T}{2} = e^x \begin{bmatrix} \cos y & 0 \\ 0 & \cos y \end{bmatrix},$$

se tiene que la matriz jacobiana F' es definida positiva —y, por tanto, es una P-matriz— en todo restángulo cerrado $[x_1, x_2] \times [-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon]$, con $\varepsilon > 0$ y $x_1 < x_2$ arbitrarios. Por consiguiente, F es inyectiva en la franja horizontal $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ y, debido a la periodicidad en la variable y, en cualquier franja horizontal del tipo

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, |y - y_0| < \pi/2, \, y_0 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si ahora exigimos más a la matriz jacobiana, podemos ampliar —exigir menos a— la geometría del conjunto donde se demuestra que la función es inyectiva.

Teorema 8. *Sea $F : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 en un entorno de la región convexa cerrada C. Supongamos que la matriz jacobiana $F'(\boldsymbol{x})$ es definida positiva (negativa) para todo $\boldsymbol{x} \in C$. Entonces F es inyectiva en C.*

Ejemplo. Consideramos ahora la aplicación

$$G(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

G es una aplicación de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ con matriz jacobiana

$$G'(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}.$$

La parte simétrica es

$$\begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix},$$

que es definida positiva si $x > 0$. Por tanto, podemos deducir que G es inyectiva en todo el semiplano $x > 0$.

No siempre se obtiene, mediante estos criterios, la mayor región de inyectividad posible. Así como G procede de la función de variable compleja $g(z) = z^2$, podemos buscar la correspondiente función real asociada a $h(z) = z^3$, que resulta ser

$$H(x,y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

Es claro que

$$H'(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix},$$

cuya parte simétrica es

$$\begin{bmatrix} 3x^2 - 3y^2 & 0 \\ 0 & 3x^2 - 3y^2 \end{bmatrix},$$

que es definida positiva en la región convexa $C = \{x > 0, x > |y|\}$. La región C es un sector circular abierto de amplitud angular $\pi/2$ con vértice en el origen y centrado en $\theta = 0$, mientras que la función H es inyectiva en un sector similar de amplitud $2\pi/3$.

Totik [16] ha demostrado recientemente que la geometría de los dominios en los Teoremas 7 y 8 es esencial y no se puede ampliar o debilitar. En efecto, en [16] se demuestra que si K es un conjunto compacto para el cual se verifica el Teorema 7 (respectivamente, el Teorema 8) con K en lugar de R (respectivamente, en lugar de C), entonces K es una región rectangular (respectivamente, una región convexa cerrada).

Observación. Los teoremas que aparecen en estas notas siguen siendo actualmente objeto de investigación activa, generalizándose a problemas débiles y demostrándose para aplicaciones con menor regularidad. Buena prueba de ello es el reciente resultado [1, Corollary 2.3], donde se demuestra que una consecuencia del teorema de Hadamard (Teorema 5) es cierta sin exigir que el difeomorfismo local sea de clase C^1. Véanse también [10], para resultados que presuponen inyectividad en la frontera y [7], para extensiones de los resultados de Hadamard a espacios métricos.

Referencias

[1] A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, Hadamard's theorem for mappings with relaxed smoothness conditions, *Sbornik Math.* **210** (2019) 165–183.

[2] M. S. Berger, *Nonlinearity & Functional Analysis*, Academic Press, 1977.

[3] M. Chamberland, G. Meisters, A mountain pass to the Jacobian conjecture, *Canad. Math. Bull.* **41** (1998) 442–451.

[4] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity Volume I: Three-Dimensional Elasticity*, North Holland, 1988.

[5] D. Gale, H. Nikaidô, The Jacobian matrix and global univalence of mappings, *Math. Ann.* **159** (1965) 81–93.

[6] C. Gutierrez, C. Biasi, Finite branched coverings in a generalized inverse mapping theorem, *Int. J. Math. Anal.* **2** (2008) 169–179.

[7] O. Gutú, J. A. Jaramillo, Global homeomorphisms and covering projections on metric spaces, *Math. Ann.* **338** (2007) 75–95.

[8] J. Hadamard, Sur les transformations ponctuelles, *Bull. Soc. Math. France* **34** (1906) 71–84.

[9] S. G. Krantz, H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem*, Springer, 2003.

[10] S. Krömer, Global invertibility for orientation-preserving Sobolev maps via invertibility on or near the boundary, *Arch. Rational Mech. Anal.* **238** (2020) 1113–1155.

[11] T. Lawson, *Topology: A Geometric Approach*, Oxford University Press, 2003.

[12] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2ª ed., Springer, 2011.

[13] W. S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, 1991.

[14] G. H. Meisters, C. Olech, Locally one-to-one mappings and a classical theorem on schlicht functions, *Duke Math. J.* **30** (1963) 63–80.

[15] S. Nollet, F. Xavier, Global inversion via the Palais-Smale condition, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **8** (2002) 17–28.

[16] V. Totik, Domains of unicity, *J. Anal. Math.* **141** (2020) 397–409.

[17] A. Weinstein, A global invertibility theorem for manifolds with boundary, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Section A* **99** (1985) 283–284.