Operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas ortogonales

Bernardo de la Calle Ysern, Luis Sanz Lorenzo
Departamento de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial
Universidad Politécnica de Madrid

Índice

1. Coordenadas curvilíneas ortogonales 1
2. Elementos diferenciales de volumen y línea 3
3. El operador gradiente 6
4. Los operadores divergencia y laplaciano 8
5. El operador rotacional 10
6. Teoremas integrales 11
7. La regla de la cadena 21
8. Resumen 23

1. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Se consideran unas coordenadas genéricas (u, v, w) dadas por el cambio de variable

$$(x, y, z) = \boldsymbol{T}(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \Omega, \tag{1}$$

donde Ω es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{T}$ es al menos de clase C^2 en Ω. En particular, se supone que la matriz jacobiana de $\boldsymbol{T}$ es invertible en Ω. Todo punto de $\boldsymbol{T}(\Omega)$ queda determinado por las coordenadas u, v y w de la misma manera que ocurre con las coordenadas x, y, z, y ambos conjuntos de coordenadas se relacionan entre sí mediante el cambio de variable $\boldsymbol{T}$.

Los tres ejemplos más importantes —si bien hay muchos otros— son las propias coordenadas cartesianas, las coordenadas cilíndricas y las esféricas. En el caso de las coordenadas cartesianas el cambio de variable $\boldsymbol{T}$ es obviamente la aplicación identidad, mientras que las coordenadas cilíndricas se definen mediante el cambio

$$(x, y, z) = \boldsymbol{T}(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) \tag{2}$$

y las esféricas por la expresión

$$(x, y, z) = \boldsymbol{T}(r, \phi, \theta) = (r\cos\theta\operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\phi), \tag{3}$$

para un rango de valores adecuado de r, θ, z y ϕ que no es necesario especificar para los razonamientos que vamos a efectuar a continuación.

8 de febrero de 2020

Nuestro propósito es encontrar la expresión de los operadores gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano en cada una de estas coordenadas. El considerar unas coordenadas genéricas nos permitirá efectuar un razonamiento común a todas ellas en vez de tratar de obtener las expresiones por separado en cada caso concreto.

Dadas unas coordenadas genéricas (u, v, w) y teniendo en cuenta que escribimos los vectores como vectores columna, se definen los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}$ y $\hat{\boldsymbol{w}}$ de la siguiente manera:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial v}, \frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial w}\right), \quad \hat{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|}, \; \hat{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}, \; \hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}. \tag{4}$$

Es decir, cada uno de los vectores señala la dirección de crecimiento de la correspondiente coordenada. Obsérvese que los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son precisamente las columnas de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{T}$ —que es invertible—, por lo que siempre formarán una base de $\mathbb{R}^3$. Si llamamos $\boldsymbol{J}$ a dicha matriz jacobiana y $\boldsymbol{D}$ a la matriz diagonal dada por

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{u}\| & 0 & 0 \\ 0 & \|\boldsymbol{v}\| & 0 \\ 0 & 0 & \|\boldsymbol{w}\| \end{pmatrix},$$

entonces podemos escribir las ecuaciones (4) como

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{J}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}})\, \boldsymbol{D}. \tag{5}$$

Es inmediato comprobar que en el caso de las coordenadas cartesianas se tiene la igualdad $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ es la matriz identidad. Frecuentemente se denotan los vectores $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$ por $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, respectivamente. Entonces un punto genérico $\boldsymbol{p}$ de $\mathbb{R}^3$ de coordenadas cartesianas (x, y, z) se puede escribir como

$$\boldsymbol{p} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = x\,\hat{\boldsymbol{x}} + y\,\hat{\boldsymbol{y}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Obsérvese que las coordenadas cartesianas de $\boldsymbol{p}$ *coinciden* con las componentes de $\boldsymbol{p}$ en la base cartesiana $\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}$, base que está formada por vectores *fijos* o *constantes*. Estas dos características son exclusivas de las coordenadas cartesianas y, como veremos a continuación, no se cumplen en general.

En el caso de las coordenadas cilíndricas, al derivar la transformación $\boldsymbol{T}$ correspondiente a (2) —recuérdese que los vectores se normalizan para que sean unitarios— obtenemos

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Lo primero que se puede observar es que los vectores de la base cilíndrica $\hat{\boldsymbol{r}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ no son constantes. Además, si el punto $\boldsymbol{p}$ tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z), entonces se tiene

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\operatorname{sen}\theta \\ z \end{pmatrix} = r\,\hat{\boldsymbol{r}} + z\,\hat{\boldsymbol{z}},$$

por lo que sus componentes en la base cilíndrica son $(r, 0, z)$, que no coinciden con sus coordenadas.

Por último, los vectores de la base esférica —véase (3) — resultan ser

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\phi \\ \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ -\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Así, si el punto $\boldsymbol{p}$ tiene coordenadas esféricas (r, ϕ, θ), entonces

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ r\cos\phi \end{pmatrix} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}, \tag{7}$$

por lo que sus componentes en la base esférica son $(r, 0, 0)$.

Hay una característica común muy importante a estos tres ejemplos de coordenadas y que puede comprobarse fácilmente: en todos los casos los vectores $\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}$ y $\hat{\boldsymbol{w}}$ son ortogonales dos a dos y, por tanto, forman una base *ortonormal* que en general, al no estar formada por vectores constantes, varía según el punto $\boldsymbol{p}$ considerado.

Definición. *Llamaremos* ***coordenadas curvilíneas ortogonales*** *a un sistema de coordenadas genéricas* (u, v, w) *para las cuales los correspondientes vectores* $\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}$ *y* $\hat{\boldsymbol{w}}$ *forman una base ortonormal en cada punto del abierto considerado.*

Como $\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}$ y $\hat{\boldsymbol{w}}$ forman una base ortonormal, el producto vectorial de cualesquiera dos vectores de la base es igual al tercer vector, salvo quizás un cambio de signo. Con el fin de que ciertos razonamientos que haremos más adelante sean válidos para cualquier sistema de coordenadas curvilíneas, supondremos en lo sucesivo que las coordenadas u, v, w se han elegido en el orden adecuado para que se verifiquen las igualdades

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{v}} \times \hat{\boldsymbol{w}}, \quad \hat{\boldsymbol{v}} = \hat{\boldsymbol{w}} \times \hat{\boldsymbol{u}}, \quad \hat{\boldsymbol{w}} = \hat{\boldsymbol{u}} \times \hat{\boldsymbol{v}}. \tag{8}$$

Es muy fácil comprobar que las coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas verifican las fórmulas (8) y son, por tanto, ortogonales.

2. Elementos diferenciales de volumen y línea

Si llamamos $\boldsymbol{H}$ a la matriz $(\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}})$, entonces otra forma de escribir (5) es

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{D} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{D}^{-1} = \boldsymbol{H}.$$

Como las columnas de la matriz $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{D}^{-1}$ son vectores ortonormales, se cumple

$$\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} \quad \Longrightarrow \quad (\det \boldsymbol{H})^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\det \boldsymbol{J}| = |\det \boldsymbol{H} \det \boldsymbol{D}| = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\,.$$

Si ahora recordamos la fórmula para el cambio de variable en una integral

$$\iiint_{T(C)} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_C f(\boldsymbol{T}(u, v, w))\, |\det \boldsymbol{J}|\; dudvdw,$$

resulta que el *elemento diferencial de volumen* $dV = dxdydz$ es igual a

$$dV = \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|\, dudvdw. \tag{9}$$

Es posible relacionar también los correspondientes *elementos diferenciales de línea*. En efecto, sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la aplicación $\boldsymbol{\gamma}$ en coordenadas cartesianas y llamemos $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ a la misma aplicación en coordenadas curvilíneas, es decir, tenemos

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$$

verificándose $\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{T} \circ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)$. Entonces la regla de la cadena implica

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{\gamma}'(t) = \boldsymbol{J}\,\tilde{\boldsymbol{\gamma}}'(t) = \boldsymbol{J} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Por otro lado, recuérdese que si $\boldsymbol{F}$ es un campo vectorial, la integral de línea de $\boldsymbol{F}$ a lo largo de la curva Γ se define como

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Esto es, usando (10) podemos escribir

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{\gamma}'(t)\, dt = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} dt = \boldsymbol{J} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} dt = \boldsymbol{J} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix}.$$

Si escribimos el último miembro de la cadena de igualdades anterior en función de las columnas de $\boldsymbol{J}$ llegamos a la expresión

$$d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{u}\, du + \boldsymbol{v}\, dv + \boldsymbol{w}\, dw = \|\boldsymbol{u}\|\, \hat{\boldsymbol{u}}\, du + \|\boldsymbol{v}\|\, \hat{\boldsymbol{v}}\, dv + \|\boldsymbol{w}\|\, \hat{\boldsymbol{w}}\, dw. \tag{11}$$

Definición. *Debido a las fórmulas* (9) *y* (11)*, las magnitudes* $\|\boldsymbol{u}\|, \|\boldsymbol{v}\|$ *y* $\|\boldsymbol{w}\|$ *reciben el nombre de* ***factores de escala****, ya que miden la deformación que se produce en la escala en la dirección de cada una de las coordenadas curvilíneas.*

A partir de ahora y por comodidad al escribir usaremos para los factores de escala la notación

$$\mathsf{u} = \|\boldsymbol{u}\|, \quad \mathsf{v} = \|\boldsymbol{v}\|, \quad \mathsf{w} = \|\boldsymbol{w}\|,$$

con lo cual, las igualdades (9) y (11) se escriben

$$\boxed{dV = \mathsf{uvw}\, dudvdw, \qquad d\boldsymbol{l} = \mathsf{u}\, \hat{\boldsymbol{u}}\, du + \mathsf{v}\, \hat{\boldsymbol{v}}\, dv + \mathsf{w}\, \hat{\boldsymbol{w}}\, dw} \tag{12}$$

Estas fórmulas en el caso de las coordenadas cilíndricas adoptan la expresión

$$\boxed{dV = r\, drd\theta dz, \qquad d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{r}}\, dr + r\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\, d\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\, dz}$$

ya que los factores de escala correspondientes son

$$\mathsf{u} = 1, \quad \mathsf{v} = r, \quad \mathsf{w} = 1,$$

mientras que para las coordenadas esféricas resultan ser

$$\mathsf{u} = 1, \quad \mathsf{v} = r, \quad \mathsf{w} = r \operatorname{sen} \phi,$$

por lo que se obtienen las fómulas

$$\boxed{dV = r^2 \operatorname{sen} \phi \, dr d\phi d\theta, \qquad d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{r}} \, dr + r \, \hat{\boldsymbol{\phi}} \, d\phi + r \operatorname{sen} \phi \, \hat{\boldsymbol{\theta}} \, d\theta}$$

Ejemplo 1. Calculemos la integral de línea

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l},$$

donde Γ es un arco cualquiera contenido en la esfera centrada en el origen de radio 1 y el campo $\boldsymbol{F}$ está definido por la fórmula

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \right).$$

Lo esencial es darse cuenta de que $\boldsymbol{F} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, véase (6). Entonces

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_\Gamma \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{r}} \, dr + r \, \hat{\boldsymbol{\theta}} \, d\theta + \hat{\boldsymbol{z}} \, dz \right) = \int_\Gamma r \, d\theta = \int_\Gamma d\theta,$$

ya que el arco Γ está contenido en la esfera unidad, por lo que $r \equiv 1$. Así, la integral de línea pedida es igual a la variación del ángulo θ entre los puntos inicial y final del arco Γ.

Observación 1. Dado un campo

$$\boldsymbol{F} = F_x \, \hat{\boldsymbol{x}} + F_y \, \hat{\boldsymbol{y}} + F_z \, \hat{\boldsymbol{z}},$$

se plantea la cuestión de calcular las componentes del campo en la base curvilínea. Es decir, de hallar F_u, F_v, F_w tal que

$$\boldsymbol{F} = F_u \, \hat{\boldsymbol{u}} + F_v \, \hat{\boldsymbol{v}} + F_w \, \hat{\boldsymbol{w}}.$$

Dado que $(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) = \boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{H} = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}})$, se verifica

$$(\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) \, \boldsymbol{H} = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}}) \quad \Longrightarrow \quad (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}}) \, \boldsymbol{H}^T, \tag{13}$$

ya que $\boldsymbol{H}^{-1} = \boldsymbol{H}^T$. Entonces podemos escribir

$$\boldsymbol{F} = (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}}) \, \boldsymbol{H}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}}) \begin{pmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{pmatrix} F_u \\ F_v \\ F_w \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, tomando los vectores traspuestos

$$(F_u, F_v, F_w) = (F_x, F_y, F_z) \, \boldsymbol{H}. \tag{14}$$

Ejemplo 2. Dado el campo
$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x, y, z),$$
vamos a calcular las componentes de $\boldsymbol{F}$ en la base esférica dada por $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. El campo $\boldsymbol{F}$ es tan sencillo que es posible obtener directamente —véase (7) — que $\boldsymbol{F} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}$. Comprobemos de todas maneras que se puede llegar al mismo resultado usando la fórmula (14). En este caso se tiene que

$$F_x = x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \quad F_y = y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \quad F_z = z = r\cos\phi,$$

y, además,

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \cos\theta\operatorname{sen}\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & r\operatorname{sen}\theta\cos\phi & r\cos\theta\operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi & -r\operatorname{sen}\phi & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}(F_r, F_\phi, F_\theta) &= (x, y, z)\,\boldsymbol{H} = (x, y, z)\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}^{-1} \\ &= (r\cos\theta\operatorname{sen}\phi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, r\cos\phi)\,\boldsymbol{J}\boldsymbol{D}^{-1} = (r, 0, 0)\,\boldsymbol{D}^{-1} = (r, 0, 0)\,,\end{aligned}$$

y se concluye nuevamente que $\boldsymbol{F} = r\,\hat{\boldsymbol{r}}$.

3. El operador gradiente

El primer operador que vamos a considerar es el operador ∇ o gradiente. Una vez que hallemos la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas, el resto de fórmulas se deducen fácilmente de ella.

Sea f una función arbitraria de clase C^1 en el conjunto abierto $T(\Omega)$ donde están definidas las coordenadas curvilíneas (u, v, w). Si llamamos $\tilde{f}$ a la propia función f, pero actuando sobre las coordenadas curvilíneas, tenemos

$$f(x, y, z) = \tilde{f}(u, v, w) \quad \text{con} \quad (x, y, z) = \boldsymbol{T}(u, v, w),$$

o, equivalentemente,
$$\tilde{f} = f \circ \boldsymbol{T}. \tag{15}$$

Por ejemplo, si trabajamos en coordenadas cilíndricas y f viene dada por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

entonces $\tilde{f}(r, \theta, z) = r^2$. Es decir, f y $\tilde{f}$ representan la misma función, pero tienen expresiones distintas; de ahí que las denotamos también de forma distinta. Si se entiende bien el concepto se puede prescindir de la tilde —lo cual se hace en la mayor parte de los libros de texto—, teniendo en cuenta que se comete un pequeño abuso de notación.

Nuestro objetivo es encontrar una expresión del operador gradiente utilizando coordenadas curvilíneas, es decir, una expresión de la forma

$$\nabla f = A\,\hat{\boldsymbol{u}} + B\,\hat{\boldsymbol{v}} + C\,\hat{\boldsymbol{w}}, \tag{16}$$

donde los coeficientes A, B y C dependen de las derivadas de $\tilde{f}$ y de las coordenadas (u, v, w). Para ello observemos en primer lugar que, si $\boldsymbol{\gamma}$ y $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ son las parametrizaciones de la curva Γ definida en la sección anterior, se cumple $f \circ \boldsymbol{\gamma}(t) = \tilde{f} \circ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, por lo que se tienen las igualdades

$$[f \circ \boldsymbol{\gamma}(t)]'\, dt = \left[\tilde{f} \circ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t)\right]' dt = \left[\tilde{f}(u(t), v(t), w(t))\right]' dt.$$

Entonces, usando la regla de la cadena y teniendo en cuenta que $\boldsymbol{dl} = \boldsymbol{\gamma}'(t)\, dt$, obtenemos

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{dl} = \nabla f \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t)\, dt = \left[\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\, u' + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\, v' + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}\, w'\right] dt = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\, dv + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}\, dw. \quad (17)$$

Ahora bien, dado que los vectores de la base curvilínea son ortonormales, de (12) se deduce la expresión

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{dl} = (A\, \hat{\boldsymbol{u}} + B\, \hat{\boldsymbol{v}} + C\, \hat{\boldsymbol{w}}) \cdot (\mathsf{u}\, \hat{\boldsymbol{u}}\, du + \mathsf{v}\, \hat{\boldsymbol{v}}\, dv + \mathsf{w}\, \hat{\boldsymbol{w}}\, dw) = A\mathsf{u}\, du + B\mathsf{v}\, dv + C\mathsf{w}\, dw. \quad (18)$$

Si ahora comparamos las fórmulas (17) y (18) llegamos a la conclusión de que se verifican las igualdades

$$A = \frac{1}{\mathsf{u}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \quad B = \frac{1}{\mathsf{v}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \quad C = \frac{1}{\mathsf{w}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}. \quad (19)$$

Por tanto, hemos demostrado la fórmula

$$\nabla f = \frac{1}{\mathsf{u}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}\, \hat{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{\mathsf{v}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}\, \hat{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{\mathsf{w}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}\, \hat{\boldsymbol{w}},$$

que se puede escribir en notación operacional —prescindiendo de la función f, que es arbitraria— como

$$\boxed{\nabla = \frac{1}{\mathsf{u}}\, \hat{\boldsymbol{u}}\, \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\mathsf{v}}\, \hat{\boldsymbol{v}}\, \frac{\partial}{\partial v} + \frac{1}{\mathsf{w}}\, \hat{\boldsymbol{w}}\, \frac{\partial}{\partial w}} \quad (20)$$

Podemos ahora fácilmente particularizar la fórmula anterior para las coordenadas cilíndricas

$$\boxed{\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\, \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{z}}\, \frac{\partial}{\partial z}}$$

y las esféricas

$$\boxed{\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\, \hat{\boldsymbol{\phi}}\, \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \phi}\, \hat{\boldsymbol{\theta}}\, \frac{\partial}{\partial \theta}}$$

Observación 2. Es posible demostrar (20) partiendo de la expresión conocida para las coordenadas cartesianas y usando la igualdad (13). En efecto, se cumple

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\, \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\, \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\, \hat{\boldsymbol{z}} = (\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}}) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = (\hat{\boldsymbol{u}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{w}})\, \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{J}^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Por otro lado, derivando la igualdad (15) mediante la regla de la cadena, se obtiene

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \boldsymbol{J} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial w}\right) \boldsymbol{J}^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{J}^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial w} \end{pmatrix},$$

y se llega a (20) sin más que sustituir esta última igualdad en (21).

Obsérvese que en las fórmulas obtenidas para el gradiente se representa a ∇f como un vector columna, por lo que *sensu stricto* son fórmulas que representan el vector traspuesto de ∇f. Este detalle, sin embargo, no tiene ninguna consecuencia práctica reseñable.

4. Los operadores divergencia y laplaciano

El operador divergencia es lineal y cumple las identidades

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{G}. \tag{22}$$

Además, es conocido que

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Estas propiedades son suficientes para encontrar la expresión de la divergencia en coordenadas curvilíneas. En efecto, consideramos la expresión de $\boldsymbol{F}$ en dichas coordenadas, es decir,

$$\boldsymbol{F} = F_u\, \hat{\boldsymbol{u}} + F_v\, \hat{\boldsymbol{v}} + F_w\, \hat{\boldsymbol{w}}.$$

Entonces es claro que

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div}(F_u\, \hat{\boldsymbol{u}}) + \operatorname{div}(F_v\, \hat{\boldsymbol{v}}) + \operatorname{div}(F_w\, \hat{\boldsymbol{w}}).$$

Calculemos el primer sumando de la expresión anterior, los otros dos restantes se hallan de manera análoga. Como, en virtud de (8), se tiene la fórmula $\hat{\boldsymbol{u}} = \hat{\boldsymbol{v}} \times \hat{\boldsymbol{w}}$ y, por otro lado, de (20) se deduce que $\nabla v = \hat{\boldsymbol{v}}/\mathsf{v}$ y $\nabla w = \hat{\boldsymbol{w}}/\mathsf{w}$, entonces se cumple

$$\hat{\boldsymbol{u}} = \mathsf{vw}\, \nabla v \times \nabla w.$$

Por tanto, usando la primera identidad de (22), obtenemos

$$\operatorname{div}(F_u\, \hat{\boldsymbol{u}}) = \operatorname{div}(F_u \mathsf{vw}\, \nabla v \times \nabla w) = F_u \mathsf{vw} \operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) + \nabla(F_u \mathsf{vw}) \cdot (\nabla v \times \nabla w).$$

Pero $\operatorname{div}(\nabla v \times \nabla w) = 0$, debido a la segunda identidad de (22) y a (23). Entonces

$$\operatorname{div}(F_u\, \hat{\boldsymbol{u}}) = \nabla(F_u \mathsf{vw}) \cdot (\nabla v \times \nabla w) = \nabla(F_u \mathsf{vw}) \cdot \left(\frac{\hat{\boldsymbol{v}}}{\mathsf{v}} \times \frac{\hat{\boldsymbol{w}}}{\mathsf{w}}\right) = \frac{\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathsf{vw}} \cdot \nabla(F_u \mathsf{vw}).$$

Y ahora usamos la fórmula (20) para el gradiente, con lo que se obtiene

$$\operatorname{div}(F_u\,\hat{\boldsymbol{u}}) = \frac{\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathsf{vw}}\cdot\left(\frac{1}{\mathsf{u}}\,\hat{\boldsymbol{u}}\,\frac{\partial\,(F_u\mathsf{vw})}{\partial u}+\frac{1}{\mathsf{v}}\,\hat{\boldsymbol{v}}\,\frac{\partial\,(F_u\mathsf{vw})}{\partial v}+\frac{1}{\mathsf{w}}\,\hat{\boldsymbol{w}}\,\frac{\partial\,(F_u\mathsf{vw})}{\partial w}\right)=\frac{1}{\mathsf{uvw}}\frac{\partial\,(F_u\mathsf{vw})}{\partial u},$$

debido a las relaciones de ortogonalidad entre los vectores de la base curvilínea.

Siguiendo los mismos razonamientos y utilizando las fórmulas

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \mathsf{wu}\,\nabla w\times\nabla u,\quad \hat{\boldsymbol{w}} = \mathsf{uv}\,\nabla u\times\nabla v,$$

se prueba igualmente

$$\operatorname{div}(F_v\,\hat{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\frac{\partial\,(F_v\mathsf{uw})}{\partial v},\quad \operatorname{div}(F_w\,\hat{\boldsymbol{w}}) = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\frac{\partial\,(F_w\mathsf{uv})}{\partial w},$$

con lo que llegamos a la fórmula final

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\Big(F_u\mathsf{vw}\Big)+\frac{\partial}{\partial v}\Big(F_v\mathsf{uw}\Big)+\frac{\partial}{\partial w}\Big(F_w\mathsf{uv}\Big)\right]} \tag{24}$$

Ahora es muy fácil particularizar esta fórmula para unas coordenadas concretas. Si

$$\boldsymbol{F} = F_r\,\hat{\boldsymbol{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_z\,\hat{\boldsymbol{z}},$$

entonces

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\,F_r+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}}$$

fórmula que expresa la divergencia de un campo en coordenadas cilíndricas.

En cuanto a las coordenadas esféricas, si

$$\boldsymbol{F} = F_r\,\hat{\boldsymbol{r}} + F_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

es sencillo comprobar que

$$\boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_r}{\partial r}+\frac{2}{r}\,F_r+\frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\phi}\,F_\phi+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}+\frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}}$$

En lo que respecta al laplaciano, es claro que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),$$

así que podemos usar la expresión (24) con $\boldsymbol{F} = \nabla f$. Debido a (20), tenemos

$$F_u = \frac{1}{\mathsf{u}}\frac{\partial f}{\partial u},\quad F_v = \frac{1}{\mathsf{v}}\frac{\partial f}{\partial v},\quad F_w = \frac{1}{\mathsf{w}}\frac{\partial f}{\partial w},$$

donde ya no hemos tenido en cuenta la distinción entre f y $\tilde{f}$. Por tanto, llegamos a la fórmula general

$$\boxed{\Delta f = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathsf{vw}}{\mathsf{u}}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathsf{uw}}{\mathsf{v}}\frac{\partial f}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\mathsf{uv}}{\mathsf{w}}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right]}$$

En el caso de las coordenadas cilíndricas la expresión anterior se escribe

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

Y en cuanto a las coordenadas esféricas, obtenemos

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r^2 \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}}$$

5. El operador rotacional

Realizamos unos razonamientos muy parecidos a los del principio de la Sección 4. El operador rotacional es lineal y cumple

$$\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \nabla f \times \boldsymbol{F}. \tag{25}$$

Entonces, dado el campo vectorial

$$\boldsymbol{F} = F_u\,\hat{\boldsymbol{u}} + F_v\,\hat{\boldsymbol{v}} + F_w\,\hat{\boldsymbol{w}},$$

podemos escribir

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{rot}(F_u\,\hat{\boldsymbol{u}}) + \operatorname{rot}(F_v\,\hat{\boldsymbol{v}}) + \operatorname{rot}(F_w\,\hat{\boldsymbol{w}}).$$

Como antes, hallamos el primer sumando de la expresión anterior. Obsérvese que en virtud de (25) y (23) podemos escribir

$$\operatorname{rot}(F_u\,\hat{\boldsymbol{u}}) = \operatorname{rot}(F_u \mathsf{u}\,\nabla u) = F_u\mathsf{u}\operatorname{rot}(\nabla u) + \nabla(F_u\mathsf{u}) \times \nabla u = \nabla(F_u\mathsf{u}) \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathsf{u}}.$$

Ahora volvemos a usar la fórmula (20) para el gradiente junto con las igualdades (8), con lo que se obtiene

$$\operatorname{rot}(F_u\,\hat{\boldsymbol{u}}) = \left[\frac{1}{\mathsf{u}}\,\hat{\boldsymbol{u}}\,\frac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial u} + \frac{1}{\mathsf{v}}\,\hat{\boldsymbol{v}}\,\frac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial v} + \frac{1}{\mathsf{w}}\,\hat{\boldsymbol{w}}\,\frac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial w}\right] \times \frac{\hat{\boldsymbol{u}}}{\mathsf{u}}$$

$$= \frac{1}{\mathsf{uw}}\,\hat{\boldsymbol{v}}\,\frac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial w} - \frac{1}{\mathsf{uv}}\,\hat{\boldsymbol{w}}\,\frac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial v} = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\begin{vmatrix} \mathsf{v}\,\hat{\boldsymbol{v}} & \mathsf{w}\,\hat{\boldsymbol{w}} \\ \dfrac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial v} & \dfrac{\partial(\mathsf{u}F_u)}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Razonando de manera análoga con los otros sumandos, se prueban las fórmulas

$$\operatorname{rot}(F_v\,\hat{\boldsymbol{v}}) = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\begin{vmatrix} \mathsf{w}\,\hat{\boldsymbol{w}} & \mathsf{u}\,\hat{\boldsymbol{u}} \\ \dfrac{\partial(\mathsf{v}F_v)}{\partial w} & \dfrac{\partial(\mathsf{v}F_v)}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \operatorname{rot}(F_w\,\hat{\boldsymbol{w}}) = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\begin{vmatrix} \mathsf{u}\,\hat{\boldsymbol{u}} & \mathsf{v}\,\hat{\boldsymbol{v}} \\ \dfrac{\partial(\mathsf{w}F_w)}{\partial u} & \dfrac{\partial(\mathsf{w}F_w)}{\partial v} \end{vmatrix},$$

con lo que se llega a la expresión final

$$\boxed{\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\begin{vmatrix} \mathsf{u}\,\hat{\boldsymbol{u}} & \mathsf{v}\,\hat{\boldsymbol{v}} & \mathsf{w}\,\hat{\boldsymbol{w}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ \mathsf{u}F_u & \mathsf{v}F_v & \mathsf{w}F_w \end{vmatrix}} \tag{26}$$

Ahora es posible particularizar esta fórmula para las coordenadas cilíndricas, la cual, después de realizados los oportunos cálculos, queda

$$\boxed{\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}F_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{z}}}$$

mientras que la correspondiente a las coordenadas esféricas es

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = {}&\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\phi}F_\theta - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}F_\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\\ &+ \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}F_\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{aligned}}$$

6. Teoremas integrales

Una vez halladas las expresiones de los diferentes operadores diferenciales en coordenadas curvilíneas —para lo cual se han empleado fundamentalmente sus propiedades algebraicas— queremos indicar un método alternativo basado en consideraciones geométricas y en los teoremas integrales del cálculo vectorial.

Este procedimiento parte de fórmulas para los diferentes operadores diferenciales que no están referidas a unas coordenadas concretas, por lo que se pueden usar para hallar representaciones en coordenadas curvilíneas generales. Además, todas ellas involucran un proceso de límite, lo que permite razonar con regiones —arcos, superficies y volúmenes— arbitrariamente pequeñas y así hacer algunas aproximaciones que facilitan los cálculos. Con el fin de realizar una exposición completamente rigurosa de estas ideas veamos en primer lugar un lema de aproximación de integrales múltiples.

Lema de aproximación. *Sea $\{R_h\}, h > 0$, una colección de rectángulos encajados de $\mathbb{R}^n$, donde h es el diámetro de R_h, es decir,*

$$h = \max_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R_h} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$

Sea $f : R_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en R_1. Si $\boldsymbol{p}$ es el punto común a todos los R_h, entonces se verifica

$$\int_{R_h} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{p})|R_h| + o(h^n), \quad h \to 0^+, \tag{27}$$

donde $|R_h|$ denota el contenido o volumen n-dimensional de R_h. Si, además, f es de clase C^2 en R_1 y $\boldsymbol{p}$ es el punto común a todos los R_h, entonces se verifica

$$\int_{R_h} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{p})|R_h| + \int_{R_h} \nabla f(\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{x} + o(h^{n+1}), \quad h \to 0^+. \tag{28}$$

Demostración. El rectángulo n-dimensional R_h es un conjunto convexo, por lo que podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo diferencial para obtener la igualdad

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{p}) = \nabla f(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}),$$

donde $\boldsymbol{c}$ es un punto situado en el segmento rectilíneo que une $\boldsymbol{p}$ con $\boldsymbol{x}$. Obviamente, el punto $\boldsymbol{c}$ depende de $\boldsymbol{x}$, pero esto no tiene importancia en el razonamiento que sigue a continuación. Por tanto,

$$\int_{R_h} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int_{R_h} f(\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{x} + \int_{R_h} \nabla f(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{p})|R_h| + \int_{R_h} \nabla f(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{x}.$$

Ahora bien, al ser f de clase C^1 en R_1 resulta que ∇f es continuo y, por tanto acotado, en R_1, por lo que podemos escribir $\|\nabla f(\boldsymbol{c})\| \leq M$ para todo $\boldsymbol{c} \in R_h$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\left|\int_{R_h} \nabla f(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})\,d\boldsymbol{x}\right| &\leq \int_{R_h} |\nabla f(\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p})|\,d\boldsymbol{x} \leq \int_{R_h} \|\nabla f(\boldsymbol{c})\|\,\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}\|\,d\boldsymbol{x} \\ &\leq \int_{R_h} Mh\,d\boldsymbol{x} = Mh|R_h| \leq Mh^{n+1} = o(h^n),\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el segundo paso y el hecho de que $|R_h| \leq h^n$ en el penúltimo. Con esto queda probado (27).

Por otra parte, si f es de clase C^2 y como consecuencia del teorema de Taylor, podemos escribir

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{p}) + \nabla f(\boldsymbol{p})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p}) + O(h^2)$$

para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}$ de R_1, donde la constante implícita en el término de error es *independiente* de $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{p}$. Basta entonces integrar la expresión anterior y tener en cuenta que

$$\left|\int_{R_h} O(h^2)\,d\boldsymbol{x}\right| \leq \int_{R_h} Mh^2\,d\boldsymbol{x} = Mh^2|R_h| = Mh^2 O(h^n) = o(h^{n+1})$$

para concluir la demostración de (28). □

Debido a que hemos usado una aproximación lineal o de primer orden para probar (27), diremos que la aproximación de la integral dada por (27) es *lineal*, mientras que la de (28) es *cuadrática* o de segundo orden.

Gradiente

Aunque la expresión del gradiente en coordenadas curvilíneas se obtuvo de una manera bastante directa en la Sección 3, vamos a deducirla nuevamente mediante una integral para que se aprecie la analogía con los casos de la divergencia y el rotacional y, dado que constituye la situación más sencilla, ayude a comprender la idea geométrica principal.

Sea Γ un arco regular —de clase C^1 — contenido en $\mathbb{R}^3$ en el cual se ha establecido un sentido de recorrido de manera que podemos hablar de puntos inicial y final de Γ, a los cuales llamamos $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$, respectivamente. Sea f una función de clase C^1 definida en un entorno de Γ. Entonces sabemos que

$$\int_\Gamma \nabla f\cdot d\boldsymbol{l} = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p}). \tag{29}$$

Queremos encontrar una expresión para ∇f de la forma (16), y utilizaremos que el elemento de línea $d\boldsymbol{l}$ verifica la segunda identidad de (12). Así, la fórmula anterior queda —véase (18)—

$$\int_\Gamma A\mathsf{u}\,du + B\mathsf{v}\,dv + C\mathsf{w}\,dw = f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p}). \tag{30}$$

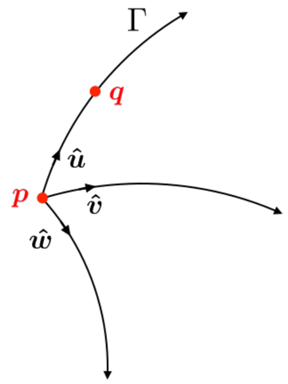

Fig. 1: Ejes curvilíneos.

Ahora elegimos una colección de arcos Γ_h, $h > 0$, que vienen dados precisamente por el eje curvilíneo correspondiente a la ordenada u que pasa por $\boldsymbol{p}$ y que dependen de h. Es decir, si el punto $\boldsymbol{p}$ tiene coordenadas (u_0, v_0, w_0), entonces Γ_h está parametrizado por la aplicación

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + t \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, h]. \tag{31}$$

Es claro que $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(0) = \boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(h)$, véase la Fig. 1. Además, se cumple

$$u'(t) \equiv 1, \quad v'(t) \equiv 0, \quad w'(t) \equiv 0,$$

con lo que la fórmula (30) queda —recuérdese que las magnitudes A y u son variables—

$$f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p}) = \int_0^h A(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t))\mathsf{u}(\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(t))\, dt.$$

En el siguiente paso aplicamos la aproximación lineal (27) a la integral anterior. Obsérvese que el dominio de integración es el rectángulo unidimensional dado por el intervalo $[0, h]$ cuyo diámetro —que coincide con su longitud o volumen unidimensional— es h. Por tanto, tenemos

$$f(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{p}) = A(\boldsymbol{p})\mathsf{u}(\boldsymbol{p})h + o(h).$$

Es decir,

$$\frac{\tilde{f}(u_0 + h, v_0, w_0) - \tilde{f}(u_0, v_0, w_0)}{h} = A(\boldsymbol{p})\mathsf{u}(\boldsymbol{p}) + o(1)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(\boldsymbol{p}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\tilde{f}(u_0 + h, v_0, w_0) - \tilde{f}(u_0, v_0, w_0)}{h} = A(\boldsymbol{p})\mathsf{u}(\boldsymbol{p}).$$

En definitiva hemos obtenido

$$A = \frac{1}{\mathsf{u}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \tag{32}$$

que es la primera igualdad de (19). Las restantes son análogas cambiando el papel de la coordenada u por la de v y w.

Divergencia

Sean V una región sólida de $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en V suficientemente regulares para que se les pueda aplicar el teorema de la divergencia. Es decir, se cumple

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dxdydz = \iint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot d\sigma = \iint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma,$$

donde $\boldsymbol{n}$ representa la normal exterior unitaria a la superficie ∂V. Por otro lado, el teorema del valor medio del cálculo integral implica que existe un $\boldsymbol{q} \in V$ tal que

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F} \, dxdydz = |V| \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{q}),$$

donde $|V|$ denota el volumen de V.

Si ahora fijamos un punto $\boldsymbol{p_0}$ y tomamos una colección de regiones regulares V_h, $h > 0$, cuyos volúmenes tiendan a 0 cuando h tienda a 0 y que contengan todas ellas a $\boldsymbol{p_0}$, entonces las consideraciones anteriores dan lugar a la fórmula

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p_0}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{|V_h|} \iint_{\partial V_h} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma_h, \tag{33}$$

donde $\boldsymbol{n}$ representa en todos los casos la normal exterior unitaria a cada superficie ∂V_h.

Vamos entonces a razonar con un paralelepípedo curvilíneo V_h limitado por las trayectorias ortogonales curvilíneas —véase la Fig. 2 — y que depende de h. Está determinado por el punto $\boldsymbol{p_0}$ de coordenadas (u_0, v_0, w_0) y por los puntos $\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_3}$ que se obtienen de $\boldsymbol{p_0}$ del mismo modo que se obtuvo el punto $\boldsymbol{q}$ de $\boldsymbol{p}$ en el razonamiento anterior sobre el gradiente. Es decir, $\boldsymbol{p_1} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(h)$, donde $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ es la aplicación definida en (31) y los otros dos puntos se obtienen de manera análoga variando, en lugar de u, las coordenadas v y w. La colección $\{V_h\}$ se obtiene entonces al hacer tender h a 0.

Teniendo en cuenta (12), podemos calcular $|V_h|$ utilizando la fórmula del cambio de variable en integrales múltiples. En efecto,

$$|V_h| = \iiint_{V_h} 1 \, dxdydz = \iiint_{R_h} \mathsf{uvw} \, dudvdw = \mathsf{u}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{v}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{w}(\boldsymbol{p_0})|R_h| + o(h^3),$$

donde hemos aplicado la aproximación lineal (27) en el tercer paso y

$$R_h = [u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + h] \times [w_0, w_0 + h].$$

Es decir, R_h es un cubo de lado h, con lo que su volumen es h^3 y su diámetro es $\sqrt{3}h^3$. Por tanto, hemos llegado a la fórmula

$$|V_h| = \mathsf{u}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{v}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{w}(\boldsymbol{p_0})h^3 + o(h^3). \tag{34}$$

La superficie ∂V_h está formada por las seis caras alabeadas del paralelepípedo curvilíneo V_h, las cuales vienen dadas por las ecuaciones

$$\begin{array}{lll} u = u_0, & u = u_0 + h, & v \in [v_0, v_0 + h],\ w \in [w_0, w_0 + h]; \\ v = v_0, & v = v_0 + h, & u \in [u_0, u_0 + h],\ w \in [w_0, w_0 + h]; \\ w = w_0, & w = w_0 + h, & u \in [u_0, u_0 + h],\ v \in [v_0, v_0 + h]. \end{array}$$

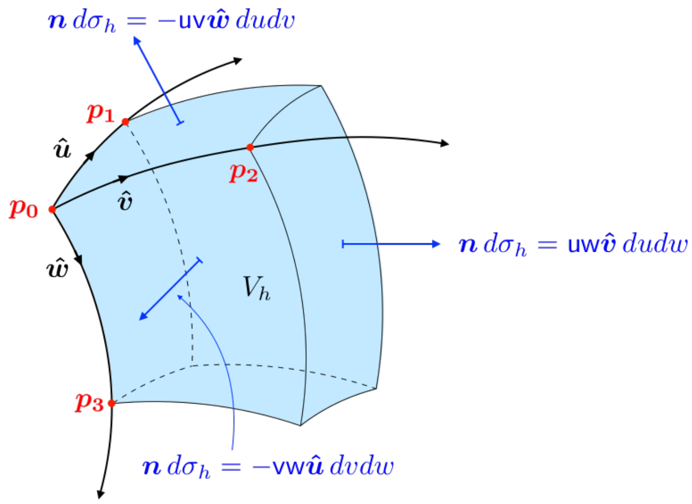

Fig. 2: Paralelepípedo curvilíneo V_h.

Todas las caras que forman ∂V_h están por tanto determinadas por el hecho de que una de las coordenadas curvilíneas es constante y las otras dos se mueven en un cuadrado de lado h. Con el fin aplicar la fórmula (33) necesitamos saber cómo calcular la integral que aparece en ella, para lo cual utilizaremos el siguiente lema en donde usaremos la expresión del campo vectorial $\boldsymbol{F}$ en coordenadas curvilíneas. Es decir,

$$\boldsymbol{F} = F_u\, \hat{\boldsymbol{u}} + F_v\, \hat{\boldsymbol{v}} + F_w\, \hat{\boldsymbol{w}}, \tag{35}$$

Lema del elemento de superficie. *Sea k una constante y S la superficie determinada por las ecuaciones*

$$u = k, \quad v \in [a, b],\ w \in [c, d].$$

Entonces se cumple la fórmula

$$\boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \mathsf{vw}\hat{\boldsymbol{u}}\, dvdw,$$

donde el signo depende de la orientación de $\boldsymbol{n}$. Por tanto, se tiene la igualdad

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \iint_{[a,b]\times[c,d]} F_u \mathsf{vw}\, dvdw, \tag{36}$$

donde el signo depende de la orientación de S.

Demostración. Obsérvese que la superficie S se puede parametrizar mediante las ecuaciones —véase (1)—

$$(x, y, z) = \boldsymbol{T}(k, v, w), \quad v \in [a, b],\ w \in [c, d].$$

Por tanto, tenemos el esquema

$$\boldsymbol{P} : (v, w) \xrightarrow{\boldsymbol{I}} (k, v, w) \xrightarrow{\boldsymbol{T}} (x, y, z).$$

Es decir, una parametrización de S viene dada por la aplicación $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{T} \circ \boldsymbol{I}$, donde $\boldsymbol{I}$ se define mediante la expresión $\boldsymbol{I}(v, w) = (k, v, w)$. Es conocido que en esta situación se cumple

$$\boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm \left(\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial v} \times \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial w} \right) dvdw.$$

Las derivadas parciales de $\boldsymbol{P}$ son los vectores columna de la matriz jacobiana de $\boldsymbol{P}$, que se puede calcular mediante la regla de la cadena, de manera que, si tenemos en cuenta (5), podemos escribir

$$\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{T}'\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{J}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\,.$$

Con lo cual concluimos que

$$\boldsymbol{n}\, d\sigma = \pm\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})\, dvdw = \pm\,(\mathsf{v}\hat{\boldsymbol{v}} \times \mathsf{w}\hat{\boldsymbol{w}})\, dvdw = \pm\mathsf{vw}\hat{\boldsymbol{u}}\, dvdw, \tag{37}$$

que es lo que queríamos probar.

La fórmula (36) es consecuencia directa de (37) y (35), ya que se cumple

$$\boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = (F_u\,\hat{\boldsymbol{u}} + F_v\,\hat{\boldsymbol{v}} + F_w\,\hat{\boldsymbol{w}})\cdot\hat{\boldsymbol{u}} = F_u,$$

debido a que las coordenadas son ortogonales. □

Obviamente se pueden demostrar lemas análogos cambiando el papel de las variables, de manera que la variable que permanezca constante sea v ó w en vez de u. Las fórmulas correspondientes quedan tal como se refleja en la Fig. 2 para tres de las caras de V_h. Obsérvese el diferente signo de las expresiones, consecuencia de que los vectores normales exteriores de caras opuestas apuntan en direcciones opuestas.

Nuestro objetivo es utilizar la fórmula (33) para calcular el operador divergencia en coordenadas curvilíneas. Para ello, vamos a calcular la integral que aparece en (33) dividiéndola en tres partes, agrupando las seis caras en grupos de dos. Apliquemos en primer lugar el lema sobre el elemento de superficie a las dos caras de V_h definidas por $u = u_0$ y $u = u_0 + h$, las cuales vamos a denotar por $S_{h,1}$ y $S_{h,2}$, respectivamente. El resultado final nos dará uno de los sumandos de la fórmula (24), un cálculo análogo con las otras dos parejas de caras de V_h da los otros sumandos. Tenemos, por tanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|V_h|}\iint_{S_{h,1}\cup S_{h,2}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\, d\sigma_h &= \frac{1}{|V_h|}\left[\iint_{S_{h,1}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\, d\sigma_h + \iint_{S_{h,2}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\, d\sigma_h\right]\\ &= -\frac{1}{|V_h|}\iint_{\{u_0\}\times C_h} F_u\mathsf{vw}\, dvdw + \frac{1}{|V_h|}\iint_{\{u_0+h\}\times C_h} F_u\mathsf{vw}\, dvdw,\end{aligned} \tag{38}$$

donde $C_h = [v_0, v_0 + h] \times [w_0, w_0 + h]$ es un cuadrado de lado h, cuya área es h^2 y cuyo diámetro es $\sqrt{2}h$. Puede parecer a primera vista que las dos integrales que aparecen en el último paso de (38) son idénticas con el signo cambiado, por lo que el resultado sería 0, pero recordemos que en la primera integral la variable u es constante e igual a u_0, mientras que en la segunda es igual a $u_0 + h$, por lo que representan integrales distintas. No podemos aplicar ahora la aproximación lineal de integrales, pues nos daría una aproximación de orden h^2 en el numerador, mientras que en el denominador tenemos una aproximación de orden h^3, véase (34). Por tanto, usaremos la aproximación cuadrática (28).

Por comodidad en la escritura denotamos la función $F_u\mathsf{vw}$ por g y a continuación estimamos mediante la aproximación (28) la primera integral que aparece en el último paso de (38) evaluando el integrando en el punto $\boldsymbol{p_0}$. Igualmente estimamos la segunda integral evaluando el integrando en el punto $\boldsymbol{p_1}$, con todo lo cual obtenemos

$$-\iint_{\{u_0\}\times C_h} g\,dvdw + \iint_{\{u_0+h\}\times C_h} g\,dvdw = [g(\boldsymbol{p_1}) - g(\boldsymbol{p_0})]\,h^2$$

$$+\iint_{\{u_0+h\}\times C_h} \nabla g(\boldsymbol{p_1})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_1})\,d\boldsymbol{x} - \iint_{\{u_0\}\times C_h} \nabla g(\boldsymbol{p_0})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_0})\,d\boldsymbol{x} + o(h^3). \quad (39)$$

Analicemos cada uno de los sumandos de (39). En primer lugar, obsérvese que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{g(\boldsymbol{p_1}) - g(\boldsymbol{p_0})}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{g(u_0+h, v_0, w_0) - g(u_0, v_0, w_0)}{h} = \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0, w_0) = \frac{\partial g}{\partial u}(\boldsymbol{p_0}).$$

Por tanto, se tiene

$$g(\boldsymbol{p_1}) - g(\boldsymbol{p_0}) = \frac{\partial g}{\partial u}(\boldsymbol{p_0})h + o(h)$$

y entonces

$$[g(\boldsymbol{p_1}) - g(\boldsymbol{p_0})]\,h^2 = \frac{\partial(F_u \mathsf{vw})}{\partial u}(\boldsymbol{p_0})h^3 + o(h^3). \quad (40)$$

Por otro lado, el integrando en la primera integral del lado derecho de (39) se puede escribir como

$$\nabla g(\boldsymbol{p_1})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_1}) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(\boldsymbol{p_1}), \frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_1}), \frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_1})\right)\cdot\begin{pmatrix} u_0+h-u_0-h \\ v-v_0 \\ w-w_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_1})(v-v_0) + \frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_1})(w-w_0),$$

ya que en esta integral la variable u es siempre igual a u_0+h. Análogamente, el integrando de la segunda integral del lado derecho de (39) admite la expresión

$$\nabla g(\boldsymbol{p_0})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_0}) = \frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_0})(v-v_0) + \frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_0})(w-w_0),$$

ya que en esta integral la variable u es siempre igual a u_0. Por tanto,

$$\iint_{\{u_0+h\}\times C_h} \nabla g(\boldsymbol{p_1})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_1})\,d\boldsymbol{x} - \iint_{\{u_0\}\times C_h} \nabla g(\boldsymbol{p_0})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_0})\,d\boldsymbol{x}$$

$$= \iint_{C_h} \left\{\left[\frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_1}) - \frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_0})\right](v-v_0) + \left[\frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_1}) - \frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_0})\right](w-w_0)\right\} dvdw.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_1}) - \frac{\partial g}{\partial v}(\boldsymbol{p_0}) = o(1) = \frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_1}) - \frac{\partial g}{\partial w}(\boldsymbol{p_0}),$$

pues $\boldsymbol{p_1}$ tiende a $\boldsymbol{p_0}$ cuando h tiende a 0. Además, se cumplen las desigualdades

$$|v-v_0| \le h, \qquad |w-w_0| \le h,$$

de modo que finalmente podemos escribir

$$\iint_{\{u_0+h\}\times C_h} \nabla g(\boldsymbol{p_1})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_1})\,d\boldsymbol{x} - \iint_{\{u_0\}\times C_h} \nabla g(\boldsymbol{p_0})\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{p_0})\,d\boldsymbol{x} = o(h^3). \tag{41}$$

Se deduce entonces de (38), (39), (40) y (41), junto con (34), que

$$\frac{1}{|V_h|}\iint_{S_{h,1}\cup S_{h,2}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\,d\sigma_h = \frac{\dfrac{\partial(F_u\mathsf{vw})}{\partial u}(\boldsymbol{p_0})h^3 + o(h^3)}{\mathsf{u}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{v}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{w}(\boldsymbol{p_0})h^3 + o(h^3)}.$$

Es decir,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{|V_h|}\iint_{S_{h,1}\cup S_{h,2}} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}\,d\sigma_h = \left(\frac{1}{\mathsf{uvw}}\frac{\partial(F_u\mathsf{vw})}{\partial u}\right)(\boldsymbol{p_0}).$$

lo cual, junto con un cálculo análogo para los otras dos partes de la integral del lado derecho de (33), prueba la fórmula (24). Notamos, por último, que, dado que hemos usado en nuestros razonamientos la fórmula (28) sobre aproximación cuadrática de integrales, debemos exigir que el campo $\boldsymbol{F}$ sea de clase C^2 en su dominio de definición.

Rotacional

Razonamos de un modo parecido al caso anterior. Sean S una porción de superficie contenida en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial definido en un entorno de S suficientemente regulares para que se les pueda aplicar el teorema de Stokes. Es decir, se cumple

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\sigma = \int_{\partial S}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l},$$

donde se ha elegido una normal unitaria $\boldsymbol{n}$ sobre la superficie S y la orientación sobre la curva ∂S se escoge de modo coherente con $\boldsymbol{n}$.

Por otro lado, el teorema del valor medio del cálculo integral implica que existe un $\boldsymbol{q}\in S$ tal que

$$\iint_S \operatorname{rot}\boldsymbol{F}\cdot d\sigma = |S|\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}),$$

donde ahora $|S|$ representa el área de la superficie S.

Si fijamos un punto $\boldsymbol{p_0}$ y tomamos una colección de superficies regulares S_h, $h>0$, cuyas áreas tiendan a 0 cuando h tienda a 0, que contengan todas ellas a $\boldsymbol{p_0}$ y cuyas normales en $\boldsymbol{p_0}$ converjan a un vector fijo $\boldsymbol{t_0}$, entonces las consideraciones anteriores dan lugar a la fórmula

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p_0})\cdot\boldsymbol{t_0} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{|S_h|}\int_{\partial S_h}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{l}_h. \tag{42}$$

Vamos a utilizar la fórmula (42) para, a partir de la representación (35) del campo $\boldsymbol{F}$, encontrar una expresión del rotacional de $\boldsymbol{F}$ de la forma

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = A\,\hat{\boldsymbol{u}} + B\,\hat{\boldsymbol{v}} + C\,\hat{\boldsymbol{w}}, \tag{43}$$

donde en general las magnitudes A, B y C son variables que dependen de u, v y w. Para ello, consideramos cada una de las tres caras determinadas por los puntos $\boldsymbol{p_i}$ del paralelepípedo curvilíneo V_h empleado en el razonamiento correspondiente al teorema de la divergencia, véase la Fig. 2. Recuérdese que V_h define una colección de paralelepípedos al hacer tender h a 0, y, por tanto, las caras de V_h definen a su vez colecciones de superficies regulares.

Elegimos en primer lugar la cara determinada por los puntos $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{p_2}$, la cual denotamos por S_h, véase la Fig. 3. Esta cara cumple que la variable w es siempre igual a w_0. El lema sobre el elemento de superficie —o, mejor dicho, uno análogo— muestra que

$$\boldsymbol{n}\, d\sigma_h = -\mathsf{uv}\hat{\boldsymbol{w}}\, dudv.$$

Entonces podemos escoger la normal unitaria a S_h como $\boldsymbol{n} = -\hat{\boldsymbol{w}}$, independientemente de h, con lo que el vector $\boldsymbol{t_0}$ de la fórmula (42) es igual a $-\hat{\boldsymbol{w}}$. Ahora las fórmulas (42) y (43) implican

$$-C(\boldsymbol{p_0}) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{|S_h|} \int_{\partial S_h} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l}_h. \tag{44}$$

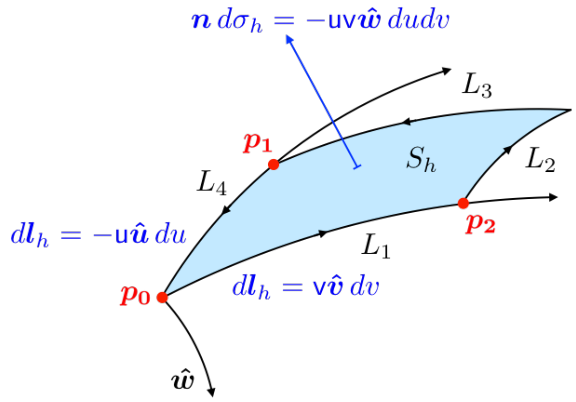

Fig. 3: Superficie curvilínea S_h.

Por otro lado, el área de S_h será

$$|S_h| = \iint_{S_h} 1\, d\sigma_h = \iint_{C_h} \mathsf{uv}\, dudv = \mathsf{u}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{v}(\boldsymbol{p_0})h^2 + o(h^2), \tag{45}$$

donde hemos utilizado en el último paso la fórmula (27) sobre aproximación lineal de integrales.

La curva ∂S_h está formada por cuatro segmentos curvilíneos en los cuales siempre dos de las coordenadas curvilíneas permanecen constantes, con lo cual es sencillo calcular los elementos de línea correspondientes a partir de la fórmula que aparece en (12). Además, dos de los elementos son idénticos a los otros dos y de sentido opuesto, véase la Fig. 3. Todas estas consideraciones, junto con (35), implican —el orden en el que están escritas las integrales en la fórmula siguiente viene dado por el sentido de recorrido de ∂S_h en la Fig. 3 partiendo del punto $\boldsymbol{p_0}$—

$$\begin{aligned}\frac{1}{|S_h|} \int_{\partial S_h} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} &= \frac{1}{|S_h|} \int_{L_1} F_v \mathsf{v}\, dv + \frac{1}{|S_h|} \int_{L_2} F_u \mathsf{u}\, du \\ &= -\frac{1}{|S_h|} \int_{L_3} F_v \mathsf{v}\, dv - \frac{1}{|S_h|} \int_{L_4} F_u \mathsf{u}\, du,\end{aligned}$$

donde hemos usado la notación —véase la Fig. 3—

$$L_1 = \{u_0\} \times [v_0, v_0 + h], \qquad L_2 = [u_0, u_0 + h] \times \{v_0 + h\},$$
$$L_3 = \{u_0 + h\} \times [v_0, v_0 + h], \qquad L_4 = [u_0, u_0 + h] \times \{v_0\}.$$

Es decir, en la primera integral del lado derecho se cumple que la variable u es siempre igual a u_0, mientras que en la tercera u es constantemente $u_0 + h$, por lo que dichas integrales no se pueden cancelar. Análogamente, en la segunda integral se tiene $v = v_0 + h$ y en la cuarta $v = v_0$. Obviamente, aunque no lo hemos declarado explícitamente en la notación, los intervalos L_i dependen de h.

A continuación aplicamos la fórmula (28) sobre aproximación cuadrática a cada pareja de integrales semejantes de la fórmula anterior. Por tanto, por un lado se tiene

$$\int_{L_1} F_v \mathsf{v}\, dv - \int_{L_3} F_v \mathsf{v}\, dv = [(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_0}) - (F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_1})]\, h$$
$$+ \int_{L_1} \nabla(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_0}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p_0})\, dv - \int_{L_3} \nabla(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_1}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p_1})\, dv + o(h^2), \quad (46)$$

donde hemos evaluado el integrando de la primera integral en $\boldsymbol{p_0}$ y el de la segunda en $\boldsymbol{p_1}$.

Siguiendo razonamientos parecidos a los del apartado anterior, llegamos a la expresión

$$[(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_0}) - (F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_1})]\, h = -\frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial u}(\boldsymbol{p_0})h^2 + o(h^2) \quad (47)$$

y también —recuérdese que w es constante e igual a w_0—

$$\int_{L_1} \nabla(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_0}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p_0})\, dv - \int_{L_3} \nabla(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_1}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p_1})\, dv$$
$$= \int_{[v_0, v_0+h]} \left[\frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial v}(\boldsymbol{p_0}) - \frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial v}(\boldsymbol{p_1})\right] (v - v_0)\, dv.$$

Pero como

$$\frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial v}(\boldsymbol{p_0}) - \frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial v}(\boldsymbol{p_1}) = o(1),$$

pues $\boldsymbol{p_1}$ tiende a $\boldsymbol{p_0}$ cuando h tiende a 0, y $|v - v_0| \leq h$, se puede concluir que

$$\int_{L_1} \nabla(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_0}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p_0})\, dv - \int_{L_3} \nabla(F_v\mathsf{v})(\boldsymbol{p_1}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p_1})\, dv = o(h^2). \quad (48)$$

Al reunir los cálculos de (45), (46), (47), y (48), obtenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{|S_h|} \int_{L_1} F_v\mathsf{v}\, dv - \frac{1}{|S_h|} \int_{L_3} F_v\mathsf{v}\, dv\right)$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\dfrac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial u}(\boldsymbol{p_0})\, h^2 + o(h^2)}{\mathsf{u}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{v}(\boldsymbol{p_0})h^2 + o(h^2)} = -\left(\frac{1}{\mathsf{uv}} \frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial u}\right)(\boldsymbol{p_0}).$$

Siguiendo razonamientos similares, se puede probar que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{|S_h|}\int_{L_2} F_v \mathsf{v}\, dv - \frac{1}{|S_h|}\int_{L_4} F_v \mathsf{v}\, dv\right) \\
&\qquad = \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{\partial\,(\mathsf{u}F_u)}{\partial v}(\boldsymbol{p_0})\, h^2 + o(h^2)}{\mathsf{u}(\boldsymbol{p_0})\mathsf{v}(\boldsymbol{p_0})h^2 + o(h^2)} = \left(\frac{1}{\mathsf{uv}}\frac{\partial\,(\mathsf{u}F_u)}{\partial v}\right)(\boldsymbol{p_0}).
\end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (44), hemos probado la fórmula

$$C = \frac{1}{\mathsf{uv}}\left[\frac{\partial\,(\mathsf{v}F_v)}{\partial u} - \frac{\partial\,(\mathsf{u}F_u)}{\partial v}\right],$$

que se corresponde con el coeficiente de $\hat{\boldsymbol{w}}$ en (26). Los otros coeficientes A y B se hallan de modo análogo considerando las otros dos caras de V_h, es decir, las caras determinadas por los puntos $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_2}$ y $\boldsymbol{p_3}$, y por los puntos $\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{p_1}$ y $\boldsymbol{p_3}$. Nuevamente, al haber usado el lema de aproximación cuadrática, debe exigirse que el campo $\boldsymbol{F}$ sea de clase C^2 en su dominio de definición.

7. La regla de la cadena

En esta sección queremos señalar que todos los cálculos realizados en las Secciones 3, 4 y 5 se pueden llevar a cabo de una manera directa empleando únicamente la regla de la cadena —que es también lo que se ha usado en dichas secciones junto con una notación matricial y operacional que facilita los cálculos—. Este procedimiento es conceptualmente sencillo pero enormemente laborioso, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3. Vamos a calcular usando la regla de la cadena la expresión del operador laplaciano en coordenadas cilíndricas. Ya se vio en las secciones anteriores que esta es una de las fórmulas más simples.

Dada una función arbitraria f de clase C^2 —para que exista igualdad de derivadas cruzadas— en un cierto dominio, partimos de la igualdad

$$f(x,y,z) = \tilde{f}(r,\theta,z) = \tilde{f}\left(r(x,y),\theta(x,y),z\right),$$

donde

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta(x,y) = c + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Aquí es pertinente la misma observación que se dio en la Sección 3 sobre la diferencia en la notación de f y $\tilde{f}$, por lo que remitimos al lector a ella.

Aplicando la regla de la cadena, tenemos entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}.$$

Si ahora derivamos la primera de las expresiones anteriores respecto de la variable x aplicando nuevamente la regla de la cadena, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta \partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \theta}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la igualdad de las derivadas cruzadas en el último paso. Ahora introducimos en la expresión anterior las fórmulas

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2},$$

con lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r\partial\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} + \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}.$$

De manera análoga se llega a la expresión

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} - \frac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r^2}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2},$$

y, finalmente, se cumple

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial z^2}.$$

La fórmula anterior puede escribirse en notación operacional como

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

que naturalmente coincide con la expresión hallada en la Sección 4.

8. Resumen

Coordenadas curvilíneas ortogonales ($\|\boldsymbol{u}\| = \mathsf{u}$, $\|\boldsymbol{v}\| = \mathsf{v}$, $\|\boldsymbol{w}\| = \mathsf{w}$)

$$dV = \mathsf{uvw}\, dudvdw, \quad d\boldsymbol{l} = \mathsf{u}\,\hat{\boldsymbol{u}}\,du + \mathsf{v}\,\hat{\boldsymbol{v}}\,dv + \mathsf{w}\,\hat{\boldsymbol{w}}\,dw,$$

$$\nabla f = \frac{1}{\mathsf{u}}\frac{\partial f}{\partial u}\,\hat{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{\mathsf{v}}\frac{\partial f}{\partial v}\,\hat{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{\mathsf{w}}\frac{\partial f}{\partial w}\,\hat{\boldsymbol{w}},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\Big(F_u\mathsf{vw}\Big) + \frac{\partial}{\partial v}\Big(F_v\mathsf{uw}\Big) + \frac{\partial}{\partial w}\Big(F_w\mathsf{uv}\Big)\right],$$

$$\Delta f = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathsf{vw}}{\mathsf{u}}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathsf{uw}}{\mathsf{v}}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\mathsf{uv}}{\mathsf{w}}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right],$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \frac{1}{\mathsf{uvw}}\begin{vmatrix} \mathsf{u}\,\hat{\boldsymbol{u}} & \mathsf{v}\,\hat{\boldsymbol{v}} & \mathsf{w}\,\hat{\boldsymbol{w}} \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ \mathsf{u}F_u & \mathsf{v}F_v & \mathsf{w}F_w \end{vmatrix}.$$

Coordenadas cartesianas ($\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{z}\| = 1$)

$$dV = dxdydz, \quad d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{x}}\,dx + \hat{\boldsymbol{y}}\,dy + \hat{\boldsymbol{z}}\,dz,$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{\boldsymbol{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}},$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\boldsymbol{y}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\boldsymbol{z}}.$$

Coordenadas cilíndricas ($\|\boldsymbol{r}\| = 1,\ \|\boldsymbol{\theta}\| = r,\ \|\boldsymbol{z}\| = 1$)

$$
\begin{aligned}
dV &= r\,dr d\theta dz, \quad d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{r}}\,dr + r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\,d\theta + \hat{\boldsymbol{z}}\,dz,\\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{\boldsymbol{z}},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,F_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z},\\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{\partial F_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\,F_\theta - \frac{1}{r}\,\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{z}}.
\end{aligned}
$$

Coordenadas esféricas ($\|\boldsymbol{r}\| = 1,\ \|\boldsymbol{\phi}\| = r,\ \|\boldsymbol{\theta}\| = r\operatorname{sen}\phi$)

$$
\begin{aligned}
dV &= r^2\operatorname{sen}\phi\,dr d\phi d\theta, \quad d\boldsymbol{l} = \hat{\boldsymbol{r}}\,dr + r\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,d\phi + r\operatorname{sen}\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\,d\theta,\\
\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}},\\
\operatorname{div}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\,F_r + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\phi}\,F_\phi + \frac{1}{r}\,\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\,\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta},\\
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r^2\operatorname{sen}\phi}\,\frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\phi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2},\\
\operatorname{rot}\boldsymbol{F} &= \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} + \frac{\cos\phi}{r\operatorname{sen}\phi}\,F_\theta - \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{r}} + \left(\frac{1}{r\operatorname{sen}\phi}\,\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\,F_\theta\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}\\
&\quad + \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\,F_\phi - \frac{1}{r}\,\frac{\partial F_r}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}.
\end{aligned}
$$