Ecuaciones polinómicas y números complejos

Bernardo de la Calle Ysern
Dpto. de Matemática Aplicada a la Ingeniería Industrial
ETS de Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid

Introducción

Es un hecho notable —hasta el punto de que se ha llamado al resultado el teorema fundamental del Álgebra— que el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos es algebraicamente cerrado. Es decir, toda ecuación polinómica con coeficientes en $\mathbb{C}$ tiene solución en $\mathbb{C}$. De aquí se deduce fácilmente que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$. Es curioso que esto se logre con solo añadir a $\mathbb{R}$ la solución de una única ecuación, concretamente la de $x^2 + 1 = 0$. Dada la importancia de esta propiedad, con frecuencia se explica la aparición de los números complejos por la necesidad lógica de encontrar una solución a la ecuación $x^2 + 1 = 0$. Sin embargo, lo cierto es que la historia real del "descubrimiento" de los números complejos tiene un carácter menos premeditado y está mas bien en relación con la solución de algunas ecuaciones polinómicas de tercer grado.

El propósito de estas breves notas no es más que relatar sucintamente cómo surgieron los números complejos en la historia de las matemáticas y dar algunas indicaciones para que cualquier persona interesada pueda realizar un estudio más detallado.

La ecuación cúbica

El primer matemático que resolvió la ecuación cúbica fue Scipione del Ferro, profesor de Bolonia, que murió en el año 1526. No publicó su resultado y parece que se lo comunicó —al menos parcialmente— a su alumno Antonio Maria Fior. Niccolò Fontana, alias Tartaglia, hizo el mismo descubrimiento hacia el año 1541, aunque tampoco lo publicó, pero se lo comunicó a Girolamo Cardano, bajo promesa de no divulgarlo. Cuando Cardano se enteró a traves de Fior del descubrimiento de Del Ferro se sintió liberado de su promesa y en su obra «Artis Magnæ» del año 1545 publicó la resolución de la ecuación cúbica y también de la cuártica, resuelta por Ludovico Ferrari, secretario suyo. La resolución de la ecuación cuártica prácticamente se obtiene como una propina una vez se conoce la solución de la cúbica. Estos descubrimientos se vieron envueltos en gran número de polémicas y disputas a las que no ayudaron el secretismo que solía acompañar a cada uno de los avances. Puede consultarse un relato más detallado en [2, Chapter 13] y, sobre todo, en la reciente monografía [7].

22 de enero de 2022

La publicación del «Artis Magnæ» de Cardano produjo un impacto enorme en las matemáticas de la época, hasta el punto de que suele considerarse el año de su publicación, 1545, el año que marca el comienzo de la era moderna de las matemáticas, pues constituye el primer paso del Álgebra para emanciparse de los argumentos puramente geométricos, lo cual posibilitaría su creciente abstracción y empleo en otras ramas de la matemática.

La solución de la ecuación cúbica es la siguiente. Dada la ecuación general

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

mediante el cambio de variable $y = x - a/3$ se llega a la ecuación

$$x^3 + x\left(b - \frac{a^3}{2}\right) + \left(\frac{2a^3}{27} + c - \frac{ab}{3}\right) = 0,$$

que no posee término cuadrático. Renombrando las variables, podemos suponer entonces que partimos de la ecuación más sencilla

$$x^3 + 3px - 2q = 0. \tag{1}$$

Si $p = 0$, la ecuación se resuelve trivialmente como $x = \sqrt[3]{2q}$, así que consideramos únicamente el caso en que $p \neq 0$. Sustituimos ahora la variable x por la suma de dos nuevas variables u y v, es decir, tomamos $x = u + v$ con el objeto de ganar capacidad de maniobra, estrategia usada en otras situaciones, tales como en la resolución de algunas ecuaciones diferenciales. Se llega así a la expresión

$$u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv + p) - 2q = 0.$$

Si ahora se elige

$$uv = -p, \qquad u^3 + v^3 = 2q, \tag{2}$$

se resuelve la ecuación. En efecto, se tiene

$$v = -\frac{p}{u} \quad \Longrightarrow \quad v^3 = -\frac{p^3}{u^3}$$

y, sustituyendo en la segunda ecuación de (2), obtenemos

$$u^6 - 2qu^3 - p^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad u^3 = q \pm \sqrt{q^2 + p^3}.$$

Por tanto, como $x = u + v$, si llamamos $\Delta = q^2 + p^3$, llegamos a la solución

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{\Delta}}, \tag{3}$$

pues si

$$u^3 = q \pm \sqrt{q^2 + p^3} \quad \Longrightarrow \quad v^3 = -\frac{p^3}{u^3} = -\frac{p^3}{q \pm \sqrt{q^2 + p^3}} = q \mp \sqrt{q^2 + p^3}.$$

Veamos un ejemplo sencillo donde aplicar la solución que hemos encontrado. Consideramos la ecuación

$$x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Para empezar, realizamos el cambio de variable $y = x - 1$ que transforma la ecuación anterior en

$$y^3 = 6y + 6.$$

Es sencillo ver, analizando la gráfica de la función $f(y) = y^3 - 6y - 6$, que esta ecuación tiene una única solución real, que vendrá dada por (3) con $p = -2$ y $q = 3$. Entonces $\Delta = 1$ y se tiene $y = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$, con lo que

$$x = 1 + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}.$$

Si se analiza por un momento la fórmula (3) desde un punto de vista moderno, se observa que cada raíz cúbica que aparece en (3) puede tener tres soluciones (algunas de ellas complejas), con lo que en teoría la fórmula podría proporcionar hasta nueve soluciones, pero recordemos que $uv = -p$, con lo que cada raíz cúbica de $q + \sqrt{\Delta}$ determina la raíz del otro sumando. De hecho, como $u + v \in \mathbb{R}$ y, también $uv \in \mathbb{R}$, entonces es fácil ver que u y v tienen que ser complejos conjugados.

Volviendo a la época del descubrimiento de la solución de la ecuación cúbica, merece la pena señalar que dicha demostración es de una apariencia engañosamente sencilla. Esto es debido a que hoy en día disponemos de una herramienta algebraica muy desarrollada, la cual permite, por ejemplo, considerar que la identidad algebraica

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) \tag{4}$$

es elemental. Aunque conocida para Cardano, la demostración de (4) se basaba en la descomposición geométrica de un cubo grande en dos cubos más pequeños —de lados u y v— y en tres paralelepípedos de lados u, v y $u+v$. La diferencia entre ambas demostraciones permite hacerse una ligera idea de la dificultad que entrañaban para los matemáticos de la época las manipulaciones algebraicas que han llevado a establecer la fórmula (3).

Raíces cuadradas de números negativos

Si $\Delta \geq 0$, la fórmula (3) efectivamente proporciona una solución real, a partir de la cual se pueden hallar el resto de raíces usando la fórmula para la ecuación cuadrática. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^3 + 6x - 20 = 0, \tag{5}$$

correspondiente a $p = 2$ y $q = 10$. Como $p > 0$, la función $f(x) = x^3 + 6x - 20$ es estrictamente creciente y la ecuación anterior solo tiene una raíz real x dada por (3). Es decir,

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}.$$

Por otra parte, una simple mirada a la ecuación (5) basta para comprobar que $x = 2$ es raíz, por lo que necesariamente —y aunque parezca extraño a primera vista— se tiene

$$2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}},$$

lo que se puede comprobar fácilmente utilizando las igualdades $\sqrt[3]{10 \pm \sqrt{108}} = 1 \pm \sqrt{3}$. Ahora es fácil ver que

$$x^3 + 6x - 20 = (x - 2)(x^2 + 2x + 10),$$

de donde se pueden hallar las otras dos raíces complejas conjugadas. De este ejemplo se desprende que la solución mediante radicales dada por (3) puede representar un número cuya expresión es bastante diferente de la que inicialmente aparece. Veremos más adelante que el cambio puede ser de naturaleza aún mayor que la que aquí se ha mostrado.

En el caso en que $\Delta < 0$, la fórmula claramente involucra raíces de números negativos, ¿qué significado tiene este hecho? Recordemos que en el siglo XVI ni siquiera los propios números negativos eran vistos con naturalidad. En efecto, en aquella época las ecuaciones algebraicas resolvían problemas geométricos, y las variables y coeficientes representaban magnitudes tales como longitud, área y volumen, por lo que no cabía que tomaran valores negativos. Así, por ejemplo, las ecuaciones

$$x^3 = ax + b, \quad x^3 + ax + b = 0, \quad a, b > 0,$$

se consideraban ecuaciones de diferente tipo y eran tratadas por separado. Con lo cual, ni siquiera las soluciones negativas eran tomadas como soluciones "reales". De hecho, Cardano las llama soluciones «falsas». Con mayor razón, la ecuación $x^2+1 = 0$ no admitía soluciones. Que al intentar resolverla apareciesen raíces de números negativos se consideraba que era la forma que tenían las matemáticas de decir que la ecuación no tenía solución.

El propio Cardano jugueteó con este tipo de números. Por ejemplo, se planteó el problema de dividir un segmento de longitud 10 de manera que los dos segmentos menores resultantes formasen un rectángulo de área 40. La ecuación correspondiente es

$$x(10 - x) = 40 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$

y las soluciones son $5 \pm \sqrt{-15}$. Cardano observó que la suma era efectivamente 10 y que el producto —si se aceptaban las reglas usuales de cálculo con los nuevos números— era igual a

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 - (-15) - 5\sqrt{-15} + 5\sqrt{-15} = 40.$$

Ahora bien, como el problema geométrico no admite solución —los dos segmentos resultantes como mucho forman un rectángulo de área 25—, Cardano describió estas soluciones como «sutiles e inútiles».

El caso irreducible

Lo que resulta sorprendente de la ecuación cúbica es que el caso $\Delta < 0$ —que es el que involucra raíces de números negativos— se corresponde precisamente con una ecuación que posee tres raíces reales distintas. El razonamiento es muy sencillo. Obsérvese que tanto si $\Delta < 0$, como si la ecuación representa una función no inyectiva, necesariamente se tiene $p < 0$. Para que la función $f(x) = x^3 + 3px - 2q$ tenga tres raíces reales distintas —no nulas— debe cumplirse que los puntos estacionarios

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + p = 0 \iff x = \pm\sqrt{-p}$$

satisfagan $f(-\sqrt{-p}) > 0$ y $f(\sqrt{-p}) < 0$, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Es decir,

$$f(-\sqrt{-p}) = p\sqrt{-p} - 3p\sqrt{-p} - 2q = -2p\sqrt{-p} - 2q > 0$$

y

$$f(\sqrt{-p}) = -p\sqrt{-p} + 3p\sqrt{-p} - 2q = 2p\sqrt{-p} - 2q < 0.$$

Ambas desigualdades se pueden escribir conjuntamente como

$$p\sqrt{-p} < q < -p\sqrt{-p} \iff |q| < -p\sqrt{-p} \iff q^2 < -p^3 \iff \Delta < 0.$$

Es en este tipo de ecuaciones, por tanto, donde se plantea la necesidad imperiosa de trabajar con las raíces de los números negativos. Esto fue llevado a cabo en el año 1572 por el ingeniero y arquitecto italiano Rafael Bombelli en su obra «Algebra». En ella aparece un estudio sistemático de los números negativos y también de las cantidades $+\sqrt{-1}$ (que él llamó «más de menos») y $-\sqrt{-1}$ (que llamó «menos de menos»). El término «imaginario» se debe a Descartes (1637) y la notación moderna i (de «imaginario») se debe a Euler (1777). Para Bombelli estaba claro que las magnitudes $+\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$, a pesar de los signos que aparecen, no son ni negativas ni positivas y estableció cuidadosamente la aritmética de los números complejos, que es la que conocemos hoy día. En particular, la suma se realiza separando las partes reales e imaginarias y se tiene la igualdad $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, identidad que fue origen de muchas confusiones, pues atentaba contra la ley algebraica $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

El razonamiento que empleó Bombelli para resolver la ecuación cúbica en el caso $\Delta < 0$ es el siguiente. Consideremos la ecuación

$$x^3 = 15x + 4 \tag{6}$$

que se corresponde con $p = -5$ y $q = 2$. La solución dada por (3) es, por tanto,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Según Bombelli, tuvo la «idea descabellada» de pensar que las raíces cúbicas tuvieran una representación análoga, es decir, que se verificaran las ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \alpha - \beta\sqrt{-1}. \end{cases}$$

De aquí se obtendría que la solución es $x = 2\alpha$. Por otra parte, de las ecuaciones anteriores se deduce obviamente

$$\begin{cases} 2 + \sqrt{-121} = \left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)^3, \\ 2 - \sqrt{-121} = \left(\alpha - \beta\sqrt{-1}\right)^3, \end{cases}$$

y, tras realizar las correspondientes operaciones, se llega a

$$\begin{cases} \alpha\left(\alpha^2 - 3\beta^2\right) = 2, \\ \beta\left(3\alpha^2 - \beta^2\right) = 11. \end{cases} \tag{7}$$

Ahora bien, es sencillo observar que $x = 4$ es solución de la ecuación original, por lo que $\alpha = 2$ —recuérdese que $x = 2\alpha$— y se obtiene $4 - 3\beta^2 = 1$, de donde se llega a $\beta^2 = 1$. Si ahora utilizamos la segunda ecuación de (7), obtenemos que $\beta = 1$. Entonces

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Por lo que, para llegar a una solución real, hay que pasar por los números complejos. Más importante todavía, de esta manera quedó establecido que la manipulación de los números complejos mediante las reglas usuales de la aritmética llevaba a resultados correctos, lo que rompió la reserva mental existente sobre las raíces cuadradas de números negativos.

Sin embargo, es importante notar que Bombelli usó en su procedimiento el conocimiento previo de la solución $x = 4$ sin la cual no podría haber resuelto directamente las ecuaciones que aparecen en el sistema (7), ¡pues está formado por ecuaciones cúbicas de la misma dificultad que la de la ecuación de partida! Así, ante la imposibilidad de hallar completamente las soluciones, se llamó a este caso «irreducible».

Soluciones trigonométricas

¿Cómo hallar las soluciones en el caso irreducible? Es preciso utilizar funciones trascendentes, trigonométricas en particular. Hagamos un razonamiento general a partir de la ecuación (1), suponiendo que estamos en el caso irreducible, es decir, se cumple $\Delta < 0$ y, por tanto, $p < 0$. Vamos a ver dos procedimientos: el primero involucra números complejos y proporciona todas las soluciones reales, mientras que el segundo no usa números complejos y es más sencillo, aunque solo proporciona una raíz.

Como se mencionó anteriormente, los números u y v en (3) son complejos conjugados, por lo que la solución x de la ecuación (1) cumple $x = 2\Re(u)$, con u y v dados por (2). Sabemos que

$$u^3 = q + \sqrt{\Delta} = q + i\sqrt{-\Delta} = re^{i\theta},$$

donde

$$r = \|u^3\| = \sqrt{q^2 - \Delta} = \sqrt{-p^3}$$

y

$$\theta = \arccos\left(\frac{\Re\left(u^3\right)}{r}\right) = \arccos\left(\frac{q}{\sqrt{-p^3}}\right) = \arccos\left(\frac{q\sqrt{-p}}{p^2}\right). \tag{8}$$

Obsérvese que la fórmula (8) tiene sentido, ya que

$$\left|\frac{q\sqrt{-p}}{p^2}\right| < 1 \iff \Delta < 0.$$

Entonces, calculando las raíces cúbicas a partir de la forma polar, obtenemos

$$u = \sqrt[3]{r}\exp\left(\frac{\theta}{3}i + \frac{2k\pi}{3}i\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

Por tanto, como $x = 2\Re(u)$,

$$x = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) = 2\sqrt{-p}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2,$$

donde θ se determina mediante la fórmula (8).

Volviendo al ejemplo (6) manejado por Bombelli, que se corresponde con $p = -5$ y $q = 2$, tenemos entonces, según (8), que

$$\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)$$

y las tres raíces de la ecuación son

$$2\sqrt{5}\cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

¿Para qué valor de k se obtiene $x = 4$? Por un lado, como $\theta \in (\pi/3, \pi/2)$, es fácil ver que la raíz de mayor valor se obtiene en el caso $k = 0$. Por otro, es claro que

$$x^3 - 15x - 4 = (x - 4)\left(x^2 + 4x + 1\right)$$

y las otras raíces son $-2 \pm \sqrt{3}$, esto es, son números negativos, por lo que necesariamente se cumple

$$4 = 2\sqrt{5}\cos\left\{\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right)\right\}.$$

El uso de los números complejos en estos razonamientos es solo aparente: facilita la notación y los cálculos, pero no es esencial, ya que todo se basa en las funciones trigonométricas y las identidades que verifican. El matemático francés François Viète, en una obra escrita en 1591 y publicada póstumamente en 1615, realiza cálculos equivalentes sin utilizar números complejos. El razonamiento es sencillo y podemos reproducirlo.

De la identidad trigonométrica

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \iff \cos^3\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha - \frac{1}{4}\cos(3\alpha) = 0$$

se deduce que la ecuación

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}\cos(3\alpha) = 0$$

tiene la solución real $y = \cos\alpha$. Si partimos de la forma general (1) —suponiendo de nuevo que $\Delta < 0$— y realizamos el cambio de variable $x = ty$, entonces la ecuación resultante

$$y^3 + \frac{3p}{t^2}y - \frac{2q}{t^3} = 0$$

tiene la forma deseada si $t = 2\sqrt{-p}$ con

$$\cos(3\alpha) = \frac{q}{-p\sqrt{-p}} = \frac{q\sqrt{-p}}{p^2}.$$

Recuperamos así la solución anterior para $k = 0$ con $3\alpha = \theta$, pues $x = ty = 2\sqrt{-p}\cos\alpha$.

El caso irreducible de la ecuación cúbica muestra, por tanto, que la resolución de ecuaciones polinómicas mediante radicales —el santo grial de las matemáticas durante varios siglos—puede llegar a representar una solución meramente formal, en cuyo caso un cálculo analítico efectivo necesita involucrar funciones trascendentes.

Como conclusión, observemos que en el descubrimiento de los números complejos se da una doble paradoja: surgen de manera natural al buscar raíces reales *positivas* —no complejas— de la ecuación cúbica, pero, en realidad, no sirven por sí solos para hallar la solución. Aún así, el resultado de todo el proceso fue liberar a la mente del recelo que los números complejos inspiraban, ya que se comprobó que daban lugar a resultados correctos, y de ahí su incorporación a los razonamientos habituales de los matemáticos.

Soluciones aproximadas

Aunque la resolución de las ecuaciones cúbica y cuártica tuvo gran importancia teórica, hay que señalar que, desde el punto de vista práctico, ambas ecuaciones ya podían resolverse en aquel entonces con la precisión que se deseara, lo cual podía llevarse a cabo mediante un método de aproximaciones sucesivas. Para ilustrarlo, tomemos la ecuación

$$x^3 = 574.$$

Como $8^3 = 512$ y $9^3 = 729$, sabemos que $x \in [8, 9]$ y, de hecho, estará bastante más cerca de 8 que de 9. Si efectuamos el cambio de variable $y = x - 8$ en la ecuación anterior llegamos a

$$y^3 + 24y^2 + 192y - 62 = 0.$$

Es decir,

$$y = \frac{62}{y^2 + 24y + 192}. \tag{9}$$

Como $x \in [8, 9]$, entonces $y \in [0, 1]$, por lo que el lado derecho de (9) cumple

$$\frac{62}{y^2 + 24y + 192} \in \left[\frac{62}{1 + 24 + 192}, \frac{62}{192}\right].$$

Es muy fácil comprobar que

$$\frac{2}{7} = \frac{62}{1 + 24 + 192} < \frac{62}{192} < \frac{1}{3}.$$

Luego usando la ecuación (9), vemos que $y \in [2/7, 1/3]$, con lo que ya hemos refinado nuestra suposición inicial. Ahora podemos escoger, por ejemplo, $y = (1/3+2/7)/2 = 13/42$, para el lado derecho de (9) y así obtenemos un valor de y en el lado izquierdo que tiene un error relativo con la solución exacta de 5×10^{-6}. Además, se puede obtener una acotación del error. El procedimiento se puede iterar, usando de nuevo la ecuación (9) y repitiendo el razonamiento, donde ahora se parte del dato $y \in [2/7, 1/3]$, en vez de $y \in [0, 1]$. Puede comprobarse que esta iteración adicional del procedimiento proporciona un nuevo valor de la solución con un error relativo de 2×10^{-7}.

Comentarios finales

El lector interesado en el estudio del problema algebraico subsiguiente, es decir, en la posible solución mediante radicales de ecuaciones de grado superior, puede consultar [1], que parte de lo que se cuenta en estas notas para llegar hasta la construcción de los polígonos regulares con regla y compás y la teoría de Galois. El libro de Stewart [6] es más completo y requiere quizás mayor madurez matemática.

En general, [3] es una obra entretenida, de fácil lectura y repleta de ideas esclarecedoras y sorprendentes sobre la historia de los números complejos.

En cuanto a una introducción a la teoría de la variable compleja en sí misma, existen una infinidad de libros de gran calidad adecuados para ello. Una introducción rápida y relativamente completa se encuentra en [5]. Por el contrario, [4] requiere una importante inversión de tiempo para su lectura debido a su nivel de detalle y al enfoque alternativo y profundo, pero no porque su dificultad sea excesiva. Por último, [8] hace también hincapié en el enfoque visual y, en cierto modo, constituye un camino intermedio entre los dos anteriores.

Referencias

[1] J. Bewersdorff, *Galois Theory for Beginners*, 2ª ed., American Mathematical Society, 2021.

[2] C. B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of Mathematics*, 3ª ed., John Wiley & Sons, 2011.

[3] P. J. Nahin, *An Imaginary Tale: The Story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, 2007.

[4] T. Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, 1998.

[5] D. Sarason, *Complex Function Theory*, 2ª ed., American Mathematical Society, 2007.

[6] I. Stewart, *Galois Theory*, 4ª ed., CRC Press, 2015.

[7] F. Toscano, *The Secret Formula*, Princeton University Press, 2020.

[8] E. Wegert, *Visual Complex Functions*, Birkhäuser, 2012.