Examen Final de Métodos Matemáticos de la Especialidad. (Técnicas Energéticas) 8 de Junio de 2018

1) Sea $f(x) = x^2 - x$, con $x \in [0,1]$. Calcular los polinomios de interpolación de Lagrange de grados 1, 2 y 3 para la función f. Calcular sus errores respectivos.

2) Escribir la fórmula y el algoritmo en forma de seudocódigo para calcular mediante la regla de Simpson compuesta la integral

$$\int_0^5 f(x)\,dx,$$

donde $f(x) = 1 - e^{-\sqrt{x}}$. El intervalo $[0,5]$ se divide en NE subintervalos de anchura variable.

3.1) Definir un mallado regular cuasi uniforme de elementos finitos.
3.2) Enumerarlas estructuras de datos más importantes que describen un mallado de elementos finitos y explicar brevemente el papel que juega cada una de ellas en el desarrollo de los cálculos de las soluciones de los problemas.
3.3) Comentar brevemente la importancia del elemento de referencia en la técnica de elementos finitos. Ilustrar vuestros comentarios con ejemplos.

4) Dado un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ con frontera ∂D poligonal, se considera el problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathrm{div}\left(k(x)\nabla u\right) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)\,u = f, \qquad \text{en } D; \quad f \in L^2(D) \\ u\mid_{\partial D_1} = 0, \quad -k(x)\nabla u\cdot\mathbf{n}\mid_{\partial D_2} = g_2(x), \quad -k(x)\nabla u\cdot\mathbf{n} + \alpha(x)\left(u(x) - u_0\right)\mid_{\partial D_3} = g_3(x), \end{array} \right. \tag{1}$$

donde el vector $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), b_2(x))$ y u_0 es una constante.
Se pide:
4.1) Decir las condiciones que $k(x)$,$\mathbf{b}(x)$ y $\mathrm{c}(x)$ han de cumplir para que la solución débil exista y sea única.
4.2) Escribir la formulación de la solución débil (formulación variacional) de (1).
4.3) Escribir la formulación de la solución de elementos finitos de (1) (suponer que el mallado es triangular quedando a vuestra elección el grado de los polinomios).
4.4) Escribir la formulación matricial de la solución de elementos finitos y decir como se calculan las matrices y los vectores que aparecen en dicha fórmula.

5) Dado el problema parabólico

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0, \quad \text{en } D\times(0,T), \quad D \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x,0) = v(x), \quad \forall x \in D, \\ u(x,t)\mid_{\partial D} = 0. \end{array} \right.$$

Razonar matemáticamente cómo es la solución débil $u(x,t)$ cuando $t \to \infty$.
Sugerencia. Utilizar la desigualdad de Poincaré

$$\|v\| \leq C\,\|\nabla v\| \qquad \forall v \in H_0^1(D),$$

donde $\|a\|$ indica la norma $L^2(D)$ de la función $a \in L^2(D)$, i.e., $\|a\|^2 = \int_D |a|^2 \, dD$, siendo $|\cdot|$ el módulo si la función a es un campo vectorial y el valor absoluto si la función es un campo escalar.

Solución:

1) Puesto que la función f es un polinomio de grado 2, el polinomio de interpolación de grado 2 y 3, $p_2(x)$ y $p_3(x)$, coinciden con f:

$$p_2(x) = p_3(x) = x^2 - x,$$

y por tanto, en estos dos casos el error es nulo.

Para calcular el polinomio de interpolación de grado 1, utilizando los nodos de interpolación x_0 y x_1, utilizamos el polinomio de interpolación de Newton:

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0).$$

Para calcular los coeficiones a_0 y a_1, evaluamos p_1 en x_0 y x_1:

$$\begin{aligned} p_1(x_0) &= a_0 = x_0^2 - x_0, \\ p_1(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) = x_1^2 - x_1, \end{aligned}$$

y resolvemos el sistema: $a_0 = x_0^2 - x_0$, $a_1 = x_1 + x_0 - 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x_0^2 - x_0 + (x_1 + x_0 - 1)(x - x_0) = x_0^2 - x_0 - x_0x_1 - x_0^2 + x_0 + (x_1 + x_0 - 1)x \\ &= (x_1 + x_0 - 1)x - x_0x_1. \end{aligned}$$

Observar que para el caso particular de $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ obtenemos $p_1(x) = 0$.

En cuanto al error en este caso, sabemos que

$$f(x) = p_1(x) + E_1(x),$$

con

$$E_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(c_x), \qquad c_x \in [0, 1].$$

Como $f''(x) = 2$, tenemos que

$$E_1(x) = (x - x_0)(x - x_1).$$

2) Se divide el intervalo $[0, 5]$ en NE subintervalos de anchura variable, con h_i el ancho de cada subintervalo, $1 \leq i \leq NE$, y definimos $\{x_i\}_{i=0}^{2NE}$ de tal manera que el intervalo $i-$ésimo queda definido por $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ (en particular $x_0 = 0$ y $x_{2NE} = 5$) y $x_{2i-1} = \frac{1}{2}(x_{2i} + x_{2i-2})$, y por tanto $h_i = x_{2i} - x_{2i-2}$. Una vez definidos los nodos de integración y los subintervalos, la regla de Simpson compuesta es:

$$\int_0^5 f(x) \, dx \simeq \sum_{i=1}^{NE} \frac{h_i}{6} \left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right).$$

El seudocódigo sería:

1. Definir los subintervalos mediante los nodos de integración $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2N}$.
2. Definir los puntos medios de cada subintervalo: $x_{2i-1} = \frac{1}{2}(x_{2i-2} + x_{2i})$, $1 \leq i \leq NE$.
3. Definir el ancho de cada subintervalo: $h_i = x_{2i} - x_{2i-2}$, $1 \leq i \leq NE$.
4. Evaluar la función f en los nodos de integración: $y_i = f(x_i)$, $0 \leq i \leq 2NE$.
5. Inicializar $I = 0$.
6. Para $i = 1, 2, \ldots, NE$, hacer

$$I = I + \frac{h_i}{6}(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}).$$

3.1)
3.2)
3.3) En la teoría del curso.

4.1)
4.2) Escribimos primero la formulación variacional del problema. Para ello definimos el espacio $V = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial D_1} = 0\}$, que es un espacio de Hilbert con la norma de $H^1(D)$. Así, si $v \in V$,

$$\begin{aligned}\int_D fv &= \int_D -\mathrm{div}(k\nabla u)v + \int_D (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + \int_D cuv \\ &= \int_D k\nabla u\cdot\nabla v - \int_{\partial D}(k\nabla u\cdot\mathbf{n})v + \int_D (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + \int_D cuv \\ &= \int_D k\nabla u\cdot\nabla v + \int_{\partial D_2} g_2 v + \int_{\partial D_3}(g_3 - \alpha(u-u_0))v + \int_D (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + \int_D cuv,\end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes y aplicado las condiciones de contorno. Por tanto, reagrupando términos tenemos que

$$\int_D k\nabla u\cdot\nabla v + \int_D (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + \int_D cuv - \int_{\partial D_3}\alpha uv = \int_D fv - \int_{\partial D_2} g_2 v - \int_{\partial D_3}(g_3 + \alpha u_0)v \qquad \forall v \in V,$$

que es la formulación variacional del problema.

Para estudiar si existe solución débil del problema, primero definimos la forma bilineal $a : V \times V \to \mathbb{R}$ y la aplicación lineal $L : V \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned}a(u,v) &= \int_D k\nabla u\cdot\nabla v + \int_D (\mathbf{b}\cdot\nabla u)v + \int_D cuv - \int_{\partial D_3}\alpha uv, \\ L(v) &= \int_D fv - \int_{\partial D_2} g_2 v - \int_{\partial D_3}(g_3 + \alpha u_0)v,\end{aligned}$$

e intentamos ver que condiciones han de verificar las funciones k, $\mathbf{b}$ y c para que exista una única solución del problema: encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u,v) = L(v) \qquad \forall v \in V$$

(solución débil del problema).

Para ello, buscamos que a y L verifiquen las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram: L debe ser lineal y continua y a debe ser bilineal, continua y coercitiva. Es trivial que L es lineal y a bilineal. Estudiamos la continuidad de L:

$$\begin{aligned} |L(v)| &\leq \|f\|_{L^2(D)} \|v\|_{L^2(D)} + \|g\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{L^2(\partial D)} \leq \|f\|_{L^2(D)} \|v\|_{H^1(D)} + C \|g\|_{L^2(\partial D)} \|v\|_{H^1(D)} \\ &\leq \left(\|f\|_{L^2(D)} + C \|g\|_{L^2(\partial D)} \right) \|v\|_{H^1(D)}, \end{aligned}$$

donde g es la función definida sobre ∂D que toma el valor de g_2 sobre ∂D_2, $g_3 + \alpha u_0$ sobre ∂D_3 y es nula en el resto de la frontera de D. Observar que hemos aplicado la continuidad del operador traza (con C constante de continuidad) para obtener esta desigualdad que implica la continuidad de L.

Para la continuidad de a se procede de forma análoga:

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \|k\|_{L^\infty(D)} \|\nabla u\|_{L^2(D)} \|\nabla v\|_{L^2(D)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} \|\nabla u\|_{L^2(D)} \|v\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{L^2(D)} \|v\|_{L^2(D)} + \|\alpha\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{L^2(\partial D_3)} \|v\|_{L^2(\partial D_3)} \\ &\leq \|k\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} \\ &\quad + \|c\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} + C^2 \|\alpha\|_{L^\infty(D)} \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)} \\ &= \left(\|k\|_{L^\infty(D)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} + \|c\|_{L^\infty(D)} + C^2 \|\alpha\|_{L^\infty(D)} \right) \|u\|_{H^1(D)} \|v\|_{H^1(D)}. \end{aligned}$$

Por último, estudiamos las coercitividad de a:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_D k |\nabla u|^2 + \int_D (\mathbf{b} \cdot \nabla u) u + \int_D c |u|^2 - \int_{\partial D_3} \alpha |u|^2 \\ &\geq \beta_1 \|\nabla u\|^2_{L^2(D)} - \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} \|\nabla u\|_{L^2(D)} \|u\|_{L^2(D)} \\ &\quad + \beta_2 \|u\|^2_{L^2(D)} - \|\alpha\|_{L^\infty(\partial D_3)} \|u\|^2_{L^2(\partial D_3)}, \end{aligned}$$

donde suponemos que β_1 y β_2 son constantes positivas que verifican que $k(x) \geq \beta_1 > 0$ y $c(x) \geq \beta_2 > 0$ para todo $x \in D$. Si ahora aplicamos la desigualdad $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ y la continuidad del operador traza,

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \beta_1 \|\nabla u\|^2_{L^2(D)} - \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} \left(\|\nabla u\|^2_{L^2(D)} + \|u\|^2_{L^2(D)} \right) \\ &\quad + \beta_2 \|u\|^2_{L^2(D)} - C \|\alpha\|_{L^\infty(\partial D_3)} \|u\|^2_{H^1(D)} \\ &= \left(\beta_1 - \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} \right) \|\nabla u\|^2_{L^2(D)} + \left(\beta_2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)} \right) \|u\|^2_{L^2(D)} \\ &\quad - C \|\alpha\|_{L^\infty(\partial D_3)} \|u\|^2_{H^1(D)}, \end{aligned}$$

es decir, si $\beta = \min\left\{\beta_1 - \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)}, \beta_2 - \frac{1}{2}\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(D)}\right\}$,

$$\begin{aligned} a(u,u) &\geq \beta\|\nabla u\|^2_{L^2(D)} + \beta\|u\|^2_{L^2(D)} - C\|\alpha\|_{L^\infty(\partial D_3)}\|u\|^2_{H^1(D)} \\ &= \left(\beta - C\|\alpha\|_{L^\infty(\partial D_3)}\right)\|u\|^2_{H^1(D)}. \end{aligned}$$

Por tanto, si k, $\mathbf{b}$ y c son tales que la constante $\beta - C\|\alpha\|_{L^\infty(\partial D_3)} > 0$, entonces a es coercitiva y podemos aplicar el Teorema de Lax-Milgram que nos garantiza la existencia y unicidad de la solución débil del problema.

4.3) Formulación por elementos finitos.

(i) Mallado y elementos con sus propiedades.

(ii) Espacios de elementos finitos:

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{v_h \in C\left(\bar{D}\right) : v_h|_{T_j} \in P_m(T_j), \quad 1 \leq j \leq N_e\right\}, \\ V_{h0} &= V_h \cap V, \end{aligned}$$

es decir, los elementos de V_{h0} se anulan sobre ∂D_1. Todo elemento de V_{h0} es de la forma

$$v_h = \sum_{i=1}^{M-NC} V_i \phi_i, \tag{2}$$

donde NC es el número de nodos en la frontera ∂D_1 y M es el número de nodos del mallado.

(iii) Hallar $u_h \in V_{h0}$ tal que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall v_h \in V_{h0}. \tag{3}$$

4.4) Sustituyendo u_h y v_h dado por (2) en (3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M-NC}\left(\int_D k\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j + \int_D(\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_i)\phi_j + \int_D c\phi_i\phi_j - \int_{\partial D_3}\alpha\phi_i\phi_j\right) &= \int_D f\phi_j \\ - \int_{\partial D_2} g_2\phi_j - \int_{\partial D_3}(g_3 + \alpha u_0)\phi_j, &\qquad 1 \leq j \leq M - NC. \end{aligned}$$

Esta expresión se puede escribir de forma matricial como

$$AU = F$$

donde A es una matriz cuadrada no simétrica cuyos coeficientes son de la forma:

$$a_{ij} = \int_D k\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j + \int_D(\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_i)\phi_j + \int_D c\phi_i\phi_j - \int_{\partial D_3}\alpha\phi_i\phi_j$$

y el vector columna F tiene por coeficientes

$$F_j = \int_D f\phi_j - \int_{\partial D_2} g_2\phi_j - \int_{\partial D_3}(g_3 + \alpha u_0)\phi_j.$$

5) Multiplicando por u la ecuación diferencial e integrando se obtiene que

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t} u - k \int_D u \Delta u = 0.$$

Integrando por partes el lado derecho de la ecuación y haciendo uso de la igualdad $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2) = \frac{\partial u}{\partial t} u$, resulta que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D u^2 = -k \int_D |\nabla u|^2 ,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = -k \|\nabla u(t)\|^2 .$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré, dado que las condiciones de contorno son Dirichlet homogéneas, se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 \leq -2kC^{-2} \|u(t)\|^2 .$$

De aquí y de la condición inicial, es inmediato que

$$\|u(t)\| \leq \|v\| e^{-\alpha t},$$

donde $\alpha = kC^2$. Por tanto,

$$\lim_{t \to \infty} \|u(t)\| = 0,$$

lo que implica que la función $u(x, t)$ tiende a la función nula cuando $t \to \infty$.