Examen Extraordinario de Métodos Matemáticos de la Especialidad (Técnicas Energéticas). 5 de Junio de 2017

1) Problema de interpolación:

1.1) Dados los puntos equiespaciados $\{x_1, x_2, x_3\}$ de la recta real y los valores $\{f(x_1), f(x_2), f'(x_2), f(x_3)\}$ de una función real f definida en el intervalo $[x_1, x_3]$, calcular con estos datos el polinomio de interpolación para la función f en ese intervalo.

1.2) Con los mismos datos y considerando los elementos $e_1 = [x_1, x_2]$ y $e_2 = [x_2, x_3]$, calcular el polinomio de interpolación a trozos.

Sugerencia. El uso del elemento de referencia $[-1, 1]$ simplificará mucho los cálculos en los ejercicios 1.1) y 1.2).

2) Dado un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ con frontera ∂D poligonal, se considera el problema:

$$\begin{array}{ll} -\mu\Delta u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f & \text{en } D;\ f \in L^2(D) \\ u\,|_{\partial D} = 0, & \end{array} \tag{1}$$

donde el vector $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ y el coeficiente μ son constantes en D.

Se pide:

2.1) Formulación de la solución débil.

2.2) Formular la solución de elementos finitos de (1) (suponer que el mallado es triangular quedando a vuestra elección el grado de los polinomios) y escribir su forma matricial.

3.1) Demostrar que

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2}$$

es una aproximación de segundo orden a $\frac{\partial u}{\partial t}\,|_{t=t_{n+1}}$.

3.2) Aplicando esta discretización de la derivada temporal, resolver por elementos finitos lineales el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{en } (0,1)\,,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \\ u(x,0) = v(x)\,, & x \in (0,1)\,, \end{cases}$$

siendo $k > 0$ una constante. Escribir también la forma matricial de la solución de elementos finitos para cada instante de tiempo t_n, para $n = 1, 2, \ldots$

Nota. Suponer conocidos u_h^0 y u_h^1.

Solución:

1.1) Primero hacemos el cambio de variable $x = x_2 + ht$, siendo $h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, y definimos la función $g(t) = f(x)$; así,

$$g'(t) = hf'(x)\,.$$

Para simplificar la notación, definimos también: $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, $y_3 = f(x_3)$ y $z = f'(x_2)$, así,

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = g(-1), \\ y_2 &= f(x_2) = g(0), \\ y_3 &= f(x_3) = g(1), \\ z &= f'(x_2) = \frac{1}{h} g'(0). \end{aligned}$$

Con estos datos, construimos la tabla de diferencias divididas generalizadas para la función g:

$$\begin{array}{cccccc} -1 & g(-1) = y_1 & & & & \\ & & g[-1,0] = y_2 - y_1 & & & \\ 0 & g(0) = y_2 & & g[-1,0,0] = hz - y_2 + y_1 & & \\ & & g[0,0] = g'(0) = hz & & g[-1,0,0,1] = \frac{1}{2}(y_3 - 2hz - y_1) \\ 0 & g(0) = y_2 & & g[0,0,1] = y_3 - y_2 - hz & & \\ & & g[0,1] = y_3 - y_2 & & & \\ 1 & g(1) = y_3 & & & & \end{array}$$

A partir de esta tabla de diferencias divididas, escribimos la expresión de Newton generalizada para g:

$$\begin{aligned} q(t) &= g[-1] + g[-1,0](t+1) + g[-1,0,0]\,t(t+1) + g[-1,0,0,1]\,t^2(t+1) \\ &= y_1 + (y_2 - y_1)(t+1) + (hz - y_2 + y_1)\,t(t+1) + \frac{1}{2}(y_3 - 2hz - y_1)\,t^2(t+1), \end{aligned}$$

y por tanto, el polinomio de interpolación para f será

$$\begin{aligned} p(x) &= y_1 + \frac{1}{h}(y_2 - y_1)(x - x_1) + \frac{1}{h^2}(hz - y_2 + y_1)(x - x_1)(x - x_2) \\ &\quad + \frac{1}{2h^3}(y_3 - 2hz - y_1)(x - x_1)(x - x_2)^2. \end{aligned}$$

1.2) Utilizando la misma notación del apartado anterior, calculamos el polinomio de interpolación en los intervalos e_1 y e_2 (que en la variable t son los intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$ respectivamente). La tabla de diferencias divididas para el polinomio de interpolación de g en $[-1,0]$ es:

$$\begin{array}{cccc} -1 & g(-1) = y_1 & & \\ & & g[-1,0] = y_2 - y_1 & \\ 0 & g(0) = y_2 & & g[-1,0,0] = hz - y_2 + y_1 \\ & & g[0,0] = g'(0) = hz & \\ 0 & g(0) = y_2 & & \end{array}$$

y por tanto el polinomio de interpolación en $[-1,0]$ de g es:

$$\begin{aligned} q_1(t) &= g[-1] + g[-1,0](t+1) + g[-1,0,0]\,t(t+1) \\ &= y_1 + (y_2 - y_1)(t+1) + (hz - y_2 + y_1)\,t(t+1), \end{aligned}$$

con lo que el polinomio de interpolación en e_1 de f es:

$$p_1(x) = y_1 + \frac{1}{h}(y_2 - y_1)(x - x_1) + \frac{1}{h^2}(hz - y_2 + y_1)(x - x_1)(x - x_2).$$

Analogamente, la tabla de diferencias divididas para el polinomio de interpolación de g en $[0,1]$ es:

$$\begin{array}{llll}
0 & g(0) = y_2 & & \\
 & & g[0,0] = g'(0) = hz & \\
0 & g(0) = y_2 & & g[0,0,1] = y_3 - y_2 - hz \\
 & & g[0,1] = y_3 - y_2 & \\
1 & g(1) = y_3 & &
\end{array}$$

y por tanto el polinomio de interpolación en $[0,1]$ de g es:

$$\begin{aligned} q_2(t) &= g[0] + g[0,0]\,t + g[0,0,1]\,t^2 \\ &= y_2 + hzt + (y_3 - y_2 - hz)\,t^2, \end{aligned}$$

con lo que el polinomio de interpolación en e_2 de f es:

$$p_2(x) = y_2 + z(x - x_2) + \frac{1}{h^2}(y_3 - y_2 - hz)(x - x_2)^2.$$

2.1) Hallar $u \in H_0^1(D)$ tal que para toda función $v \in H_0^1(D)$

$$\mu \int_D \nabla u \cdot \nabla v + \int_D \mathbf{b} \cdot \nabla u v = \int_D f v.$$

2.2) Formulación por elementos finitos.
i) Mallado y elementos con las consabidas propiedades.
ii) Espacios de elementos finitos

$$\begin{aligned} W_h &= \left\{ v_h \in C^0\left(\bar{D}\right) : v_h\,|_{T_j} \in P_m(T_j),\, 1 \le j \le NE \right\}, \\ V_h &= W_h \cap H_0^1(D). \end{aligned}$$

Los elementos de V_h se anulan en el contorno. Todo elemento de V_h es de la forma

$$v_h = \sum_{i=1}^{M-NC} V_i \phi_i, \tag{3}$$

donde NC es el número de nodos en la frontera y M es el número de nodos de la malla.

iii) Hallar $u_h \in V_h$ tal que para toda $v_h \in V_h$

$$\mu \int_D \nabla u_h \cdot \nabla v_h + \int_D \mathbf{b} \cdot \nabla u_h v_h = \int_D f v_h. \tag{4}$$

Sustituyendo u_h y v_h dados por (3) en (4) se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{M-NC} U_j \left(\mu \int_D \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j + \int_D \phi_i \mathbf{b} \cdot \nabla\phi_j \right) = \int_D f\phi_i \qquad (1 \leq i \leq M - NC).$$

Esta expresión se puede escribir como

$$AU = F$$

donde A es una matriz cuadrada no simétrica cuyos coeficientes son de la forma

$$a_{ij} = \mu \int_D \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j + \int_D \phi_i \mathbf{b} \cdot \nabla\phi_j,$$

y el vector columna F tiene por coeficientes

$$F_i = \int_D f\phi_i.$$

A continuación hay que decir como se calculan elemento por elemento los coeficientes a_{ij} y los coeficientes F_i, hablando del acoplamiento de las matrices y vectores elementales.

3.1) Como nos indica el enunciado, tenemos que desarrollar por Taylor alrededor del punto $t = t_{n+1}$. Así,

$$\begin{aligned}
u^n &= u\left(t_{n+1} - \Delta t\right) = u^{n+1} - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} |_{t_{n+1}} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} |_{t_{n+1}} - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} |_{t_{n+1}} + O\left(\Delta t^4\right) \\
u^{n-1} &= u\left(t_{n+1} - 2\Delta t\right) = u^{n+1} - 2\Delta t \frac{\partial u}{\partial t} |_{t_{n+1}} + \frac{4\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} |_{t_{n+1}} - \frac{8\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} |_{t_{n+1}} + O\left(\Delta t^4\right)
\end{aligned}$$

De esta forma resulta que

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} |_{t_{n+1}} - \frac{\Delta t^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} |_{t_{n+1}} + O\left(\Delta t^3\right).$$

Por tanto, suponiendo que $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} |_{t_{n+1}}$ está acotada y con Δt suficientemente pequeño podemos escribir que

$$\frac{\partial u}{\partial t} |_{t_{n+1}} = \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} + O\left(\Delta t^2\right).$$

3.2) Primero formulamos la solución de elementos finitos aplicando el esquema. Como nos interesa el enunciado del problema, para $n = 1, 2, \ldots$, tenemos que calcular la solución de elementos finitos de la ecuación

$$\begin{aligned}
&\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} - k \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{en } (0,1), \\
&u^{n+1}(0) = u^{n+1}(1) = 0.
\end{aligned}$$

Mallado

Espacios

$$V_h = \{v_h \in C[0,1] : v_h|_{e_k} \in P_1(e_k),\ 1 \leq k \leq NE,\ v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Todo elemento de V_h se expresa de la forma

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{M} V_i \phi_i(x), \qquad V_1 = V_M = 0.$$

Formulación de la solución de elementos finitos: hallar $u_h \in V_h$ tal que para toda $v_h \in V_h$

$$\int_0^1 \left(3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}\right) v_h + 2\Delta tk \int_0^1 \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial v_h}{\partial x} = 0.$$

La forma matricial de esta expresión es

$$(3L + 2\Delta tkS)\, U^{n+1} = 4LU^n - LU^{n-1}$$

donde

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \int_0^1 \phi_i \phi_j, \\ s_{ij} &= \int_0^1 \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x}. \end{aligned}$$

A continuación hay que escribir brevemente como se calculan los coeficientes elemento por elemento y su acoplamiento.