Examen Final de Métodos Matemáticos de la Especialidad. (Técnicas Energéticas) 3 de Julio de 2017

1.a) ¿Por qué la interpolación de Lagrange no es buena para polinomios de alto grado? Poner algún ejemplo y comentarlo.

1.b) ¿Qué métodos existen para paliar ese problema? Dar ejemplos y comentarlos.

2) Demostrar que la regla de cuadratura en triángulos T

$$\frac{|T|}{3}\left(f\left(\bar{a}_{12}\right)+f\left(\bar{a}_{23}\right)+f\left(\bar{a}_{31}\right)\right)$$

donde $\bar{a}_{ij}$ denota el punto medio del lado $a_i a_j$, es exacta para polinomios de grado ≤ 2. Sugerencia: ayudaros del elemento de referencia.

3.1) Calcular la matrices elementales que se generan cuando se resuelve el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } D \subset \mathbb{R}^2, \\ u\,|_{\partial D} = 0, & \end{cases}$$

por elementos finitos lineales.

3.2) Organización modular de un programa de elementos finitos para problemas estacionarios.

4) Dado el problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u, & \text{en } D \subset \mathbb{R}^2,\ t>0, \\ u\left(x,t\right)|_{\partial D} = 0, & \text{para } t>0, \\ u\left(x,0\right) = v\left(x\right), & x \in D, \end{cases}$$

siendo $k>0$ una constante, demostrar que

$$\left\|u\left(t\right)\right\| \leq \left\|v\right\| e^{-\alpha t},$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma L^2 de la función, i.e.,

$$\left\|u\left(t\right)\right\| = \left(\int_D u^2\left(x,t\right) dD\right)^{1/2}.$$

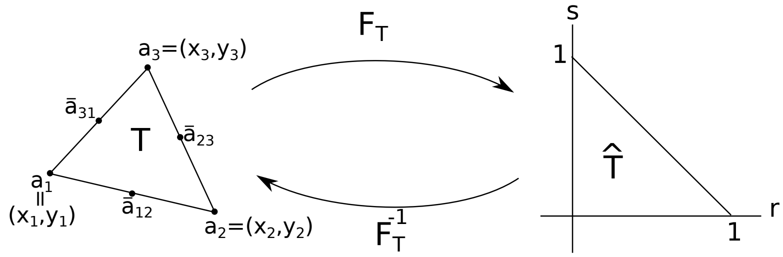
Solución:

1.a)

1.b) En la teoría del curso.

2) Sea $\hat{T}$ el triángulo de referencia, definimos el cambio de variable $F_T : T \to \hat{T}$

$$\left(x,y\right) = F_T^{-1}\left(r,s\right) = B\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \qquad \text{siendo } B = \begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix},$$



así,

$$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_{\hat{T}} \hat{f}(r,s)\,|J_T|\,drds, \tag{1}$$

donde

$$|J_T| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 2\,|T|\,,$$

con $|T|$ denotando el área de T.

Para demostrar que la regla de cuadratura es exacta para polinomios de grado ≤ 2 calculamos los valores exactos y los que nos da la regla de cuadratura para las siguientes funciones: $\hat{f}_1(r,s) = 1,\ \hat{f}_2(r,s) = r,\ \hat{f}_3(r,s) = s,\ \hat{f}_4(r,s) = r^2,\ \hat{f}_5(r,s) = s^2$ y $\hat{f}_6(r,s) = rs$, pues estas funciones forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 2 en $\hat{T}$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{T}} 1drds &= \left|\hat{T}\right| = \frac{1}{2},\\
\int_{\hat{T}} rdrds &= \int_0^1 \int_0^{1-s} rdrds = \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-s} ds = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)^2\,ds = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-s)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6},\\
\int_{\hat{T}} sdrds &= \int_0^1 \int_0^{1-s} sdrds = \int_0^1 [rs]_0^{1-s}\,ds = \int_0^1 s(1-s)\,ds = \left[\frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6},\\
\int_{\hat{T}} r^2drds &= \int_0^1 \int_0^{1-s} r^2drds = \int_0^1 \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1-s} ds = \frac{1}{3}\int_0^1 (1-s)^3\,ds = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4}(1-s)^4\right]_0^1 = \frac{1}{12},\\
\int_{\hat{T}} s^2drds &= \int_0^1 \int_0^{1-s} s^2drds = \int_0^1 \left[rs^2\right]_0^{1-s} ds = \int_0^1 s^2(1-s)\,ds = \left[\frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12},\\
\int_{\hat{T}} rsdrds &= \int_0^1 \int_0^{1-s} rsdrds = \int_0^1 \left[\frac{r^2}{2}s\right]_0^{1-s} ds = \frac{1}{2}\int_0^1 s(1-s)^2\,ds = \frac{1}{2}\left[\frac{s^4}{4} - 2\frac{s^3}{3} + \frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{24},
\end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}_1\left(\frac{1}{2},0\right) + \hat{f}_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \hat{f}_1\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\left|\hat{T}\right|}{3}3 = \frac{1}{2},\\
\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}_2\left(\frac{1}{2},0\right) + \hat{f}_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \hat{f}_2\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\left|\hat{T}\right|}{3} = \frac{1}{6},\\
\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}_3\left(\frac{1}{2},0\right) + \hat{f}_3\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) + \hat{f}_3\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\left|\hat{T}\right|}{3} = \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}_4\left(\frac{1}{2},0\right)+\hat{f}_4\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\hat{f}_4\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{12},\\
\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}_5\left(\frac{1}{2},0\right)+\hat{f}_5\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\hat{f}_5\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{12},\\
\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}_6\left(\frac{1}{2},0\right)+\hat{f}_6\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\hat{f}_6\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) &= \frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{24},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que los puntos medios de los lados en el triángulo de referencia son $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Puesto que los valores coinciden, debido a la linealidad de la integral y de la fórmula de cuadrátura, ésta es exacta para cualquier polinomio de grado ≤ 2 en $\hat{T}$ y por (1) en T.

Si además quisiéramos probar que la fórmula de cuadratura no es exacta para polinomios de grado mayor que 2, bastaría con encontrar un polinomio de grado 3 para el cual la fórmula de cuadratura no fuera exacta: dada $\hat{f}(r,s)=r^3$,

$$\int_{\hat{T}} r^3 dr ds = \int_0^1\int_0^{1-s} r^3 dr ds = \int_0^1\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{1-s} ds = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-s)^4 ds = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{5}(1-s)^5\right]_0^1 = \frac{1}{20},$$

mientras que

$$\frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\left(\hat{f}\left(\frac{1}{2},0\right)+\hat{f}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\hat{f}\left(0,\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\left|\hat{T}\right|}{3}\frac{1}{4}=\frac{1}{24}.$$

3.1) La formulación de elementos finitos de la formulación variacional del problema conduce a un sistema lineal simétrico de ecuaciones

$$A\mathbf{u}=\mathbf{f},$$

donde A es la matriz global del sistema que se obtiene ensamblando las siguientes matrices elementales:

$$\begin{aligned}
s_{ij}^{(T)} &= \int_T \nabla\phi_i^{(T)}\nabla\phi_j^{(T)}, \qquad 1\leq i,j\leq 3,\\
l_{ij}^{(T)} &= \int_T \phi_i^{(T)}\phi_j^{(T)}, \qquad 1\leq i,j\leq 3,
\end{aligned}$$

donde T es un triángulo cualquiera de la malla y $\left\{\phi_i^{(T)}\right\}_{i=1}^3$ son las funciones base elementales definidas en el triángulo T y que en este caso son polinomios lineales.

El ejercicio pide el cálculo de los coeficientes $s_{ij}^{(T)}$ y $l_{ij}^{(T)}$ (necesarios para ensamblar la matriz A). Para calcular estos coeficientes es aconsejable hacer el cambio de variable del ejercicio 2 al elemento de referencia $\hat{T}$. De esta forma, tenemos que $\phi_i^{(T)}(x,y)=\hat{\lambda}_i(r,s)$ para $(x,y)\in T$,

$(r,s) \in \hat{T}$, siendo $\left\{ \hat{\lambda}_i \right\}_{i=1}^{3}$ las funciones base locales para polinomios de grado ≤ 1 definidas en $\hat{T}$. Estas funciones vienen dadas por

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 (r,s) = 1 - r - s, \\ \hat{\lambda}_2 (r,s) = r, \\ \hat{\lambda}_3 (r,s) = s. \end{cases}$$

Introduciendo el cambio de coordenadas sabemos que

$$\nabla \phi_i^{(T)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \phi_i^{(T)}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \phi_i^{(T)}}{\partial y} \end{pmatrix} = B^{-T} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial s} \end{pmatrix} = B^{-T} \nabla \hat{\lambda}_i,$$

donde $B^{-T} = \left(B^{-1}\right)^T$ y B como en el ejercicio 2.

Utilizando las expresiones de las funciones $\hat{\lambda}_i$, tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \phi_1^{(T)} &= B^{-T} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \nabla \phi_2^{(T)} &= B^{-T} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla \phi_3^{(T)} &= B^{-T} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Con todos estos preparativos, estamos en condiciones de calcular los coeficientes $s_{ij}^{(T)}$ y $l_{ij}^{(T)}$:

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(T)} &= \int_T \nabla \phi_i^{(T)} \nabla \phi_j^{(T)} = |B| \int_{\hat{T}} \left(B^{-T} \nabla \hat{\lambda}_i \right) \cdot \left(B^{-T} \nabla \hat{\lambda}_j \right), \qquad 1 \leq i,j \leq 3, \\ l_{ij}^{(T)} &= \int_T \phi_i^{(T)} \phi_j^{(T)} = |B| \int_{\hat{T}} \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j, \qquad 1 \leq i,j \leq 3. \end{aligned}$$

Damos las expresiones de estos coeficientes:

$$\begin{aligned} s_{11}^{(T)} &= \frac{1}{4|T|} \left[(a+b)^2 + (c+d)^2 \right], \\ s_{12}^{(T)} &= -\frac{1}{4|T|} \left[a(a+b) + c(c+d) \right] = s_{21}^{(T)}, \\ s_{13}^{(T)} &= -\frac{1}{4|T|} \left[b(a+b) + d(c+d) \right] = s_{31}^{(T)}, \\ s_{22}^{(T)} &= \frac{1}{4|T|} \left[a^2 + c^2 \right], \\ s_{23}^{(T)} &= -\frac{1}{4|T|} \left[ab + cd \right] = s_{32}^{(T)}, \\ s_{33}^{(T)} &= \frac{1}{4|T|} \left[b^2 + d^2 \right], \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} l_{11}^{(T)} &= \frac{|T|}{6}, \\ l_{12}^{(T)} &= \frac{|T|}{12} = s_{21}^{(T)}, \\ l_{13}^{(T)} &= \frac{|T|}{12} = s_{31}^{(T)}, \\ l_{22}^{(T)} &= \frac{|T|}{6}, \\ l_{23}^{(T)} &= \frac{|T|}{12} = l_{32}^{(T)}, \\ l_{33}^{(T)} &= \frac{|T|}{6}, \end{aligned}$$

donde los coeficientes a, b, c, d corresponden a los coeficientes de la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

del ejercicio 2.

3.2) En la teoría del curso.

4) Multiplicando por u la ecuación diferencial e integrando se obtiene que

$$\int_D \frac{\partial u}{\partial t} u = k \int_D u \Delta u.$$

Integrando por partes el lado derecho de la ecuación y haciendo uso de la igualdad $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^2\right) = \frac{\partial u}{\partial t} u$, resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D u^2 = -k \int_D \left|\nabla u\right|^2,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 = -k\left\|\nabla u\left(t\right)\right\|^2.$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré, dado que las condiciones de contorno son Dirichlet homogéneas, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\left\|u\left(t\right)\right\|^2 \leq -2kC\left\|u\left(t\right)\right\|^2,$$

con $C \equiv cte$. De aquí y de la condición inicial, es inmediato que

$$\left\|u\left(t\right)\right\| \leq \left\|v\right\| e^{-\alpha t},$$

donde $\alpha = kC$.