Soluciones del examen final de métodos matemáticos de la especialidad. (Técnicas Energéticas) 31 Mayo 2016

1) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un cuadrado, en él se considera el problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = f \quad \text{en} \quad D, \\ u = 0 \quad \text{en} \quad \partial D, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f \in L^2(D)$. Se define el espacio

$$H^2(D) = \left\{ v : D \to \mathbb{R} \mid v \in L^2(D),\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(D) \text{ y } \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(D);\ 1 \leq i, j \leq 2 \right\}.$$

$H^2(D)$ es un espacio normado con norma $\|v\|^2_{H^2(D)} = \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \left\|D^2 v\right\|^2$, donde

$$\left\|D^2 v\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \int_D \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dD.$$

Suponiendo que $u \in H^2(D)$, se pide demostrar que:

(i)

$$\left\|D^2 u\right\| = \|\Delta u\|;$$

(ii) teniendo en cuenta que $\|v\|^2_{H^2(D)} \leq \|v\| \left\|D^2 v\right\|$,

$$\|u\|_{H^2(D)} \leq C \|f\|,$$

donde C es una constante positiva.

Solución

(i) Desarrollando las expresiones tenemos que

$$\begin{aligned} \left\|D^2 u\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \int_D \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dD \\ = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 \right\} dD \end{aligned} \tag{2}$$

y

$$\begin{aligned} \|\Delta u\|^2 = \int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 dD \\ = \int_D \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 \right\} dD. \end{aligned} \tag{3}$$

Para demostrar lo que nos piden, observando (2) y (3) vemos que hay que demostrar, sabiendo que D es un cuadrado y $u = 0$ en ∂D, que

$$\int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dD = \int_D \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dD.$$

Esto es precisamente el ejercicio 1 de la entrega 3 (explicado y comentado en clase después) y que "presuntamente" muchos hicisteis bien. Repetiré aquí lo que dije en clase. Integrando por partes y haciendo uso del intercambio de órdenes de derivación, tenemos que

$$\int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 dD = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial D_j} n_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) d\sigma - \int_D \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) dD$$

$$= - \int_D \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) dD,$$

puesto que $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} \int_{\partial D_j} n_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = 0$ porque $u = 0$ en ∂D. Volviendo a hacer lo mismo, tenemos que

$$- \int_D \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) dD = - \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial D_j} n_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) d\sigma + \int_D \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) dD$$

$$= \int_D \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) dD.$$

(ii) Por (1), tomando normas L^2 a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$\|\Delta u\| = \|f\|.$$

Sabiendo que $\|v\|^2_{H^2(D)} \leq \|v\| \left\| D^2 v \right\|$ y por lo demostrado en (i) se tiene entonces que

$$\|u\|^2_{H^2(D)} \leq \|u\| \|f\|, \tag{4}$$

pero por la formulación de la solución débil:

$$\int_D \nabla u \cdot \nabla v dD = \int f v dD \quad \forall v \in H_0^1(D),$$

poniendo aquí $v = u$ y aplicando las desigualdades de Cauchy-Schwarz y Poincaré resulta entonces que

$$\frac{1}{C^2} \|u\|^2 \leq \|u\| \|f\|.$$

De aquí y de (4) se obtiene el resultado pedido.

2) Dado un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ con frontera ∂D poligonal, se considera el problema:

$$
\begin{aligned}
&-\mu \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f \quad \text{en} \;\; D; \;\;\; f \in L^2(D) \\
&u \mid_{\partial D} = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

donde el vector $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ y el coeficiente μ son constantes en D.

Se pide:

1) Formulación de la solución débil.

2)Demostrar que la forma bilineal asociada a la solución débil es continua y coerciva.

3) Formular la solución de elementos finitos de (3) (suponer que el mallado es triangular quedando a vuestra eleción el grado de los polinomios) y escribir su forma matricial.

Solución

1) Hallar $u \in H_0^1(D)$ tal que para toda función $v \in H_0^1(D)$

$$
\mu \int_D \nabla u \cdot \nabla v dD + \int_D \mathbf{b} \cdot \nabla u v dD = \int_D f v dD \tag{6}
$$

2) La forma bilineal asociada es

$$
a(u, v) = \mu \int_D \nabla u \cdot \nabla v dD + \int_D \mathbf{b} \cdot \nabla u v dD
$$

Continuidad: existe una constante positiva C tal que

$$
|a(u, v)| \leq C \left\| u \right\|_{H^1(D)} \left\| v \right\|_{H^1(D)} .
$$

Vamos a demostra qye esto es así:

$$
|a(u, v)| \leq \mu \textstyle\int_D |\nabla u| \, |\nabla v| \, dD + |\mathbf{b}| \int_D |\nabla u| \, |v| \, dD,
$$

(por Cauchy -Schwarz)

$$
\leq \max(\mu, |\mathbf{b}|) \left\{ \|\nabla u\| \, \|\nabla v\| + \|\nabla u\| \, \|v\| \right\},
$$

(por lo visto en clase y notas de clase)

$$
\leq \max(\mu, |\mathbf{b}|) \sqrt{2} \, \|\nabla u\| \underbrace{\sqrt{\|\nabla v\|^2 + \|v\|^2}}_{\|v\|_{H^1(D)}},
$$

$$
\leq C \left\| u \right\|_{H^1(D)} \left\| v \right\|_{H^1(D)} .
$$

Recordad que en el ejercicio 4 entrega 3 demostrasteis que $\|\nabla u\| \leq \|u\|_{H^1(D)} \; \forall u \in H_0^1(D)$.

Coercividad: existe una constante α positiva tal que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(D)}$$

Vamos a demostrarlo. Tomando $v = u$ se tiene que

$$a(u,u) = \mu \int_D |\nabla u|^2 \, dD + \int_D (\mathbf{b} \cdot \nabla u) \, u dD.$$

Sabemos que

$$\int_D (\mathbf{b} \cdot \nabla u) \, u dD = \frac{1}{2} \int_D \mathbf{b} \cdot \nabla u^2 dD = \int_{\partial D} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{b}) \, u^2 d\sigma - \frac{1}{2} \int u^2 div \, (\mathbf{b}) = 0$$

porque $\mathbf{b}$ es constante. Por tanto,

$$a(u,u) = \mu \int_D |\nabla u|^2 \, dD = \mu \|\nabla u\|^2 \geq \mu K_1^2 \|u\|^2_{H^1(D)}$$

como **demostrasteis aplicando Poincaré en el ejercicio 4 entrega 3**

3) Formulación por elementos finitos
3.1) Mallado y elementos con las consabidas propiedades
3.2) Espacios de elementos finitos

$$W_h = \left\{ v_h \in C^0(\overline{D}) : v_h \mid_{T_j} \in P_m(T_j) \; 1 \leq j \leq NE \right\},$$

$$V_h = W_h \cap H_0^1(D)$$

Los elementos de V_h se anulan en el contorno. Todo elemento de V_h es de la forma

$$v_h = \sum_{i=1}^{M-NC} V_i \phi_i, \tag{7}$$

donde NC es el número de nodos en la frontera t M es el número de nodos de la malla.

3.3) Hallar $u_h \in V_h$ tal que para toda $v_h \in V_h$

$$\mu \int_D \nabla u_h \cdot \nabla v_h dD + \int_D \mathbf{b} \cdot \nabla u_h v_h dD = \int_D f v_h dD. \tag{8}$$

Sustituyendo u_h y v_h dados por (7) en (8) se obtiene que

$$\sum_{j=1}^{M-NC} U_j \left\{ \mu \int \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dD + \int_D \phi_i \mathbf{b} \cdot \nabla \phi_j dD \right\} = \int_D f \phi_i dD \quad (1 \leq i \leq M-NC).$$

Esta expresión s puede escribir como

$$AU = F$$

donde A es una matriz cuadrdada no simétrica cuyos coeficientes son de la forma

$$a_{ij} = \mu \int \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dD + \int_D \phi_i \mathbf{b} \cdot \nabla\phi_j dD,$$

el vector columna F tiene por coeficientes

$$F_i = \int_D f\phi_i dD.$$

A continuación hay que decir como se calculan elemento por elemento los coeficientes a_{ij} y los coeficientes F_i, hablando del acoplamiento de las matrices y vectores elementales.

3.1) Demostrar que el esquema

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} \tag{9}$$

es una aproximación de segundo orden a $\frac{\partial u}{\partial t} \mid_{t=t_{n+1}}$.

Solución

Como nos indica el enunciado tenemos que desarrollar por Taylor alrededor del punto $t = t_{n+1}$. Así

$$u^n = u(t_{n+1} - \Delta t) = u^{n+1} - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \mid_{t_{n+1}} + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mid_{t_{n+1}} - \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \mid_{t_{n+1}} + O(\Delta t^4)$$

$$u^{n-1} = u(t_{n+1} - 2\Delta t) = u^{n+1} - 2\Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \mid_{t_{n+1}} + \frac{4\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mid_{t_{n+1}} - \frac{8\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \mid_{t_{n+1}} + O(\Delta t^4) \tag{10}$$

De esta forma, resulta que

$$\frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \mid_{t_{n+1}} - \frac{6\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \mid_{t_{n+1}} + O(\Delta t^4)$$

Por tanto, suponiendo que $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \mid_{t_{n+1}}$ está acotada y con Δt suficientemente pequeño podemos escribir que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \mid_{t_{n+1}} = \frac{3u^{n+1} - 4u^n + u^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

3.2) Aplicar este esquema para resolver por elementos finitos el problema

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ \text{ en } \ (0,1),\, t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = v(x), \ x \in (0,1), \end{array} \right. \tag{11}$$

siendo k una constante conocida, y demostrar que para $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\| u_h^{n+1} \right\|^2 + \left\| 2u_h^{n+1} - u_h^n \right\|^2 \leq \left\| u_h^1 \right\|^2 + \left\| 2u_h^1 - u_h^0 \right\|^2. \tag{12}$$

Sugerencias 1) Observar que para calcular la solución en un instante dado se necesitan la soluciones de los dos instantes inmediatamente anteriores, por eso el cálculo de la solución en el inatante t_1 se hace mediante el esquema de segundo orden de Crank-Nicolson. Una vez conocida la solución u_h^1 se aplica (9) para calcular la solución de (11).

2) Para llegar a la desigualdad (12) hacer uso de la relación

$$2a(3a-4b+c)=a^2+(2a-b)^2$$

$$+(a-2b+c)^2-b^2-(2b-c)^2,$$

donde a, b y c son números reales, y de esta forma obtener que para todo $n=1,2,...$

$$\left\|u_h^{n+1}\right\|^2+\left\|2u_h^{n+1}-u_h^n\right\|^2\leq\left\|u_h^n\right\|^2+\left\|2u_h^n-u_h^{n-1}\right\|^2.$$

Nota La desigualdad (12) muestra que el esquema es estable en la norma L^2.

Solución

Primero formulamos la solución de elementos finitos aplicando el esquema. Como nos indica el enunciado del problema, para $n=1,2,...$, tenemos que calcular la solución de elementos finitos de la ecuación

$$\frac{3u^{n+1}-4u^n+u^{n-1}}{2\Delta t}-k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \;\text{ en }\; (0,1);\;\; u^{n+1}(0)=u^{n+1}(1)=0. \quad (13)$$

Mallado

Espacios

$$V_h=\{v_h\in C[0,1]: v_h\mid_{e_k} P_1(e_k),\; 1\leq e_k\leq NE,\; v_h(0)=v_h(1)=0\}$$

Todo elemento de V_h se expresa de la forma

$$v_h=\sum_{i=1}^{M}V_i\phi_i(x),\quad V_1=V_M=0. \quad (14)$$

Formulación solución de elemntos finitos: halla $u_h\in V_h$ tal que para toda $v_h\in V_h$

$$\int_0^1(3u_h^{n+1}-4u_h^n+u_h^{n-1})v_h+2\Delta tk\int_0^1\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}\frac{\partial v_h}{\partial x}=0 \quad (15)$$

La forma matricial de esta expresión es

$$(3L+2\Delta tkS)\,U^{n+1}=4LU^n-LU^{n-1}$$

donde

$$l_{ij}=\int_0^1\phi_i\phi_j dx,$$

$$s_{ij}=\int_0^1\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\frac{\partial\phi_j}{\partial x}dx$$

A continuación hay que escribir brevemente como se calcula los coeficientes elemento por elemnto y su acoplamiento. Para demostrar (12), nos fijamos en (13) y tomando $v_h = u_h^{n+1}$ (**como habeis hecho en el ejercicio 2 de la última entrega**) se obtiene que

$$2\int_0^1 (3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1})u_h^{n+1} + 4\Delta tk \int_0^1 \left(\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}\right)^2 dx = 0$$

Haciendo uso de la sugerencia 2 e identificando $a = u_h^{n+1}$, $b = u_h^n$ y $c = u_h^{n+1}$ resulta que

$$2\int_0^1 (3u_h^{n+1} - 4u_h^n + u_h^{n-1})u_h^{n+1} = \int_0^1 \left(u_h^{n+1}\right)^2 dx$$

$$+ \int_0^1 (2u_h^{n+1} - u_h^n)^2 dx + \int_0^1 \left(u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\right)^2 dx$$

$$- \int_0^1 \left(u_h^n\right)^2 dx - \int_0^1 (2u_h^n - u_h^{n-1})^2 dx$$

$$= \left\|u_h^{n+1}\right\|^2 + \left\|2u_h^{n+1} - u_h^n\right\|^2 + \left\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\right\|^2$$

$$- \left\|u_h^n\right\|^2 - \left\|2u_h^n - u_h^{n-1}\right\|^2.$$

Sustituyendo esto en la expresión anterior y teniendo en cuenta que

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x}\right)^2 dx = \left\|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right\|^2 \geq 0,$$

se obtiene que para todo $n = 1, 2, ...$

$$\left\|u_h^{n+1}\right\|^2 + \left\|2u_h^{n+1} - u_h^n\right\|^2 + \left\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\right\|^2 + 4\Delta tk \left\|\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}\right\|^2$$

$$= \left\|u_h^n\right\|^2 - \left\|2u_h^n - u_h^{n-1}\right\|^2.$$

Puesto que también $\left\|u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}\right\|^2 \geq 0$, de esta expresión se deduce que

$$\left\|u_h^{n+1}\right\|^2 + \left\|2u_h^{n+1} - u_h^n\right\|^2 \leq \left\|u_h^n\right\|^2 - \left\|2u_h^n - u_h^{n-1}\right\|^2 \tag{16}$$