Examen Extraordinario de Métodos Matemáticos de la Especialidad (Técnicas Energéticas). 27 de Junio de 2016

1.1) Escribir la solución de elementos finitos del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-d^2u}{dx^2} + \dfrac{du}{dx} + u = f \quad \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{array} \right. \tag{1}$$

1.2) Dividiendo el intervalo $[0,1]$ en cuatro elementos de igual longitud, escribir el sistema de ecuaciones a que da lugar (1). Para este ejemplo tomar $f(x) = 1$ en $(0,1)$.

2.1) Sea $f(x) = sen(\pi x)$, $x \in [0,1]$. Aproximar $f(x)$ por un polinomio cuadrático de Lagrange y comparar $f\left(\frac{3}{4}\right) - p\left(\frac{3}{4}\right)$ con el valor estimado por la fórmula del error para los polinomios cuadráticos.

2.2) Aproximar $f(x)$ por un polinomio de Hermite $H(x)$ y comparar $f\left(\frac{3}{4}\right) - H\left(\frac{3}{4}\right)$ con el valor estimado por la fórmula del error.

3.1) Considerar un mallado del dominio D formado por triángulos. ¿Qué información relevante sobre el mallado se almacena en un código de elementos finitos?

3.2) Decir brevemente, escribiendo un pseudocódigo, como se realiza el ensamblado de las matrices elementales para formar la matriz total del sistema de ecuaciones que se obtiene cuando se aplica el método de elementos finitos.

Solución:

1.1) Escribimos primero la formulación variacional del problema: encontrar $u \in H_0^1(I)$ tal que para toda función $v \in H_0^1(I)$

$$\int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \int_0^1 \frac{du}{dx}v + \int_0^1 uv = \int_0^1 fv$$

donde $I = (0,1)$. Para llegar a la formulación variacional, se multiplica la ecuación en derivadas parciales for la función v, se integra en el intervalo $(0,1)$ y se integra por partes en la integral donde aparece una segunda derivada.

Definimos ahora la forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ y la aplicación lineal $L : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_0^1 \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \int_0^1 \frac{du}{dx}v + \int_0^1 uv \\ &\text{y} \\ L(v) &= \int_0^1 fv \end{aligned}$$

para $u, v \in H_0^1(I)$. De esta manera el problema puede escribirse como: encontrar $u \in H_0^1(I)$ tal que para toda función $v \in H_0^1(I)$

$$a(u, v) = L(v).$$

Aunque el ejercicio no lo pide, el problema admite una única solución débil pues puede demostrarse que la forma bilineal es continua y coercitiva.

La solución por elementos finitos del problema pasa por definir primero el espacio de elementos finitos. Primero tomamos los nodos x_i tales que $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 1$. Así,

$$\begin{aligned} W_h &= \left\{ v_h \in C^0([0,1]) : v_h \,|_{I_j} \in P_m(I_j), \quad 1 \le j \le N \right\} \\ &\text{y} \\ V_h &= W_h \cap H_0^1(I) \end{aligned}$$

siendo $I_j = [x_{j-1}, x_j]$. Por tanto, cualquier elemento $v_h \in V_h$ se puede expresar como

$$v_h = \sum_{j=1}^{N-1} v_j \phi_j \tag{2}$$

donde $\{\phi_j\}_{1 \le j \le N-1}$ es una base de V_h.

De esta manera, la solución por elementos finitos será: encontrar $u_h \in V_h$ tal que para toda función $v_h \in V_h$

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx} + \int_0^1 \frac{du_h}{dx} v_h + \int_0^1 u_h v_h = \int_0^1 f v_h,$$

y puesto que $\{\phi_j\}_{1 \le j \le N-1}$ es una base de V_h, el problema es equivalente a: encontrar $u_h \in V_h$ tal que para toda $1 \le i \le N-1$

$$\int_0^1 \frac{du_h}{dx}\frac{d\phi_i}{dx} + \int_0^1 \frac{du_h}{dx} \phi_i + \int_0^1 u_h \phi_i = \int_0^1 f \phi_i.$$

Sustituyendo u_h dada por (2) en esta última ecuación, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N-1} u_i \left(\int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} + \int_0^1 \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} + \int_0^1 \phi_i \phi_j \right) = \int_0^1 f \phi_i.$$

Definiendo

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} + \int_0^1 \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} + \int_0^1 \phi_i \phi_j \\ F_i &= \int_0^1 f \phi_i \end{aligned}$$

esta última expresión puede escribirse como

$$AU = F$$

donde $A = ((a_{ij}))_{1 \le i,j \le N-1}$ es una matriz cuadrada y $U = (u_1\, u_2 \ldots u_{N-1})^t$ y $F = (F_1\, F_2 \ldots F_{N-1})^t$ son vectores columna.

1.2) En este caso $x_i = \frac{i}{4}$, con $0 \le i \le 4$, es decir, $h = \frac{1}{4}$, así:

$$\int_0^1 \phi_i \phi_j = \begin{cases} \frac{h}{6} = \frac{1}{24}, & \text{si } |i-j| = 1 \\ \frac{2h}{3} = \frac{1}{6}, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} -\frac{1}{h} = -4, & \text{si } |i-j| = 1 \\ \frac{2}{h} = 8, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \phi_i \frac{d\phi_j}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } i = j-1 \\ 0, & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{2}, & \text{si } i = j+1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por tanto,

$$A = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 196 & -83 & 0 \\ -107 & 196 & -83 \\ 0 & -107 & 196 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$\int_0^1 f\phi_j = \int_0^1 \phi_j = h = \frac{1}{4}.$$

Por tanto, el sistema lineal que queda, en este caso de tres ecuaciones con tres incógnitas, puede escribirse como:

$$\left.\begin{array}{rrrcl} 196u_1 & -83u_2 & & = & 6 \\ -107u_1 & +196u_2 & -83u_3 & = & 6 \\ & -107u_2 & +196u_3 & = & 6 \end{array}\right\}$$

2.1) Puesto que tenemos que calcular un polinomio de interpolación de Lagrange de grado 2, necesitamos 3 nodos en el intervalo $[0,1]$, así, tomamos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 1$. Si escribimos en una tabla los valores x_i frente a $y_i = f(x_i)$ tenemos:

x_i	0	0.5	1
y_i	0	1	0

El polinomio de Lagrange puede calcularse mediante los polinomios interpoladores de Lagrange o mediante el método de Newton. En este caso, y puesto que tenemos dos valores nulos, una buena alternativa es utilizar los polinomios interpoladores de Lagrange. Así,

$$\begin{aligned} p(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) = L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \\ &= -4x(x-1) = -4x^2 + 4x \end{aligned}$$

La estimación de error nos dice que

$$\left|f\left(\frac{3}{4}\right)-p\left(\frac{3}{4}\right)\right|\leq\frac{\left|\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\right|}{3!}\max_{x\in[0,1]}\left|f'''\left(x\right)\right|$$

o bien, puesto que hemos tomado nodos equiespaciados,

$$\left|f\left(\frac{3}{4}\right)-p\left(\frac{3}{4}\right)\right|\leq\frac{h^3}{9\sqrt{3}}\max_{x\in[0,1]}\left|f'''\left(x\right)\right|.$$

Sustituyendo por los valores, $h=\frac{1}{2}$ y $\max_{x\in[0,1]}\left|f'''\left(x\right)\right|=\pi^3$, obtenemos

$$\left|f\left(\frac{3}{4}\right)-p\left(\frac{3}{4}\right)\right|\leq\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{9\sqrt{3}}\pi^3=0.248632,$$

En este caso podemos comprobar que efectivamente el error es menor que esta cantidad pues

$$f\left(\frac{3}{4}\right)-p\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}=-0.042893.$$

2.2) Calculamos un polinomio H de Hermite que aproxime la función f en $[0,1]$ que verifique que $H\left(0\right)=f\left(0\right)=0$, $H\left(1\right)=f\left(1\right)=0$, $H'\left(0\right)=f'\left(0\right)=\pi$ y $H'\left(1\right)=f'\left(1\right)=-\pi$. Para ello utilizamos la tabla de diferencias divididas generalizada, que en este caso es:

$$\begin{array}{llllll}
x_0=0 & f\left[0\right]=f\left(0\right)=0 & & & & \\
 & & f\left[0,0\right]=f'\left(0\right)=\pi & & & \\
x_0=0 & f\left[0\right]=f\left(0\right)=0 & & f\left[0,0,1\right]=-\pi & & \\
 & & f\left[0,1\right]=0 & & f\left[0,0,1,1\right]=0 & \\
x_1=1 & f\left[1\right]=f\left(1\right)=0 & & f\left[0,1,1\right]=-\pi & & \\
 & & f\left[1,1\right]=f'\left(1\right)=-\pi & & & \\
x_1=1 & f\left[1\right]=f\left(1\right)=0 & & & &
\end{array}$$

y la fórmula de Newton generalizada:

$$H\left(x\right)=0+\pi\cdot x-\pi x^2+0\cdot x^2\left(x-1\right)=\pi\left(-x^2+x\right).$$

La estimación de error en este caso nos dice que

$$\left|f\left(\frac{3}{4}\right)-H\left(\frac{3}{4}\right)\right|\leq\frac{\left(x-x_0\right)^2\left(x-x_1\right)^2}{4!}\max_{x\in[0,1]}\left|f^{iv}\left(x\right)\right|.$$

En este caso

$$\max_{x\in[0,1]}\left|f^{iv}\left(x\right)\right|=\pi^4.$$

Además, si definimos $A\left(x\right) = \left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right) = x\left(x-1\right)$, podemos comprobar fácilmente que

$$\max_{x\in[0,1]} \left|A\left(x\right)\right| = \left|A\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{1}{4}$$

y por tanto,

$$\left|f\left(\frac{3}{4}\right) - H\left(\frac{3}{4}\right)\right| \leq \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4!}\pi^4 = 0.253670.$$

Comprobamos una vez más que efectivamente el error es menor que esta cantidad:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) - H\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi\frac{3}{16} = 0.118058.$$

3.1)
3.2) En la teoría del curso.